

PERIODICAL ROOM  
GENERAL LIBRARY  
UNIV. OF MICH.

# ANNALEN DER PHYSIK

GEGRÜNDET 1799 DURCH F. A. C. GREN  
UND FORTGEFÜHRT DURCH L. W. GILBERT,  
J. C. POGGENDORFF, G. u. E. WIEDEMANN,  
P. DRUDE

VIERTE FOLGE  
BAND 81      ERGÄNZUNGSHEFT  
DER GANZEN REIHE 386. BANDES  
ERGÄNZUNGSHEFT

KURATORIUM:  
M. PLANCK, E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG  
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT  
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK

MIT DEM BILDNIS VON M. WIEN  
UND DREI TAFELN



L E I P Z I G

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und der Verlagsbuchhandlung entgegengenommen. Im Jahre 1926 erscheinen die Bände 79, 80 und 81 à 8 Hefte. Der Abonnementspreis beträgt pro Band Rm. 20.— zuzüglich Rm. —.80 für Porto bei direkter Zusendung für das Inland und Rm. 1.60 für das Ausland.

Redaktionsschluß am 11. Dezember 1926.

# Inhalt

	Seite
1. M. v. Laue. Der Einfluß der Temperatur auf die Röntgenstrahlinterferenzen . . . . .	877
2. Gerhard Pfestorf. Die Bestimmung der optischen Konstanten von Metallen im sichtbaren und ultravioletten Teil des Spektrums . . . . .	906
3. Karl Schachtschabel. Ein einfaches Verfahren zur Messung der Absorption in großem Spektralbereich nebst Anwendung auf Gläser. (Hierzu Tafel IX). . . . .	929
4. E. Waetzmann. Über entoptische Ringsysteme. . . . .	952
5. Eberhard Buchwald. Graphische Darstellungen zur Kinetik des Starkeffekts. . . . .	958
6. H. Busch. Berechnung der Bahn von Kathodenstrahlen im axialsymmetrischen elektromagnetischen Felde . . . . .	974
7. W. Wien. Magnetische Ablenkung der Spektrallinien. (Hierzu Tafel X) . . . . .	994
8. Erich Blechschmidt. Kathodenzerstäubungsprobleme. (II. Mitteilung.) Die Kathodenzerstäubung in Abhängigkeit von den Betriebsbedingungen. (Hierzu Tafel XI) . . . . .	999
9. Artur v. Hippel. Kathodenzerstäubungsprobleme. (III Mitteilung.) Zur Theorie der Kathodenzerstäubung . . . . .	1043
10. Georg Joos. Über Farbe und Magnetismus von Ionen . . . . .	1076
11. Walter Wessel. Über den Massenpunkt in der Wellenmechanik . . . . .	1086
12. Max Wimmer. Über die Beeinflussung der ultraroten Kohlen säureabsorptionsbande bei $4,27\mu$ durch fremde Gase und ihre Anwendung zur Gasanalyse. . . . .	1091
13. Fritz Kirchner. Über die Richtungsverteilung der von polarisierten Röntgenstrahlen ausgelösten Elektronen. (I. Mitteilung) . . . . .	1113
14. W. Gerlach und E. Leher. Suszeptibilität der Gase, Curiesches Gesetz und Diamagnetismus der Flammengase . . . . .	1129
15. A. Sommerfeld. Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie . . . . .	1135
16. P. Debye. Einige Bemerkungen zur Magnetisierung bei tiefer Temperatur . . . . .	1154
17. R. Pohl und E. Rupp. Über Alkalihalogenidphosphore . . . . .	1161







*Mr. Wien*

**MAX WIEN**

**ZU SEINEM 60. GEBURTSTAGE**

**AM 25. DEZEMBER 1926**

**DARGEBRACHT**

**VON**

**SCHÜLERN UND FREUNDEN**

s  
l  
s  
s  
V  
m  
i  
s  
d  
g  
u  
V  
s  
e  
b  
F  
F

19  
u

17  
U

# ANNALEN DER PHYSIK

## VIERTE FOLGE. BAND 81

### 1. *Der Einfluß der Temperatur auf die Röntgenstrahlinterferenzen;*

*von M. v. Laue*

#### § 1. Übersicht und Kritik der vorliegenden Arbeiten

Von dem Einfluß der Wärmebewegung auf die Röntgenstrahlinterferenzen handeln schon viele Untersuchungen. Zuerst hat Debye<sup>1)</sup> 1913 für ein einfaches Gitter die Frage beantwortet, wie voneinander unabhängig um ihre Ruhelagen schwingende Atome diese Interferenzen abändern, und der Verfasser<sup>2)</sup> hat die leichte Verallgemeinerung für Gitter mit mehratomiger Basis vorgenommen. Aber die Atome sind in ihren Bewegungen gewiß nicht unabhängig voneinander; und so gehen alle späteren Untersuchungen mit besserem Recht von der Theorie der Eigenschwingungen des Gitters aus, die ungefähr um dieselbe Zeit von Born und Karmán<sup>3)</sup> begründet und dann von Born<sup>4)</sup> in mathematisch äußerst eleganter Weise ausgebaut wurde. Nachdem Schrödinger<sup>5)</sup> das entsprechende Problem für lineare Gitter behandelt hatte, war es wiederum Debye<sup>6)</sup>, der zuerst diese grundlegende Verbesserung in die Theorie einführte. An ihn knüpften dann Faxén<sup>7)</sup> und Waller<sup>8)</sup> an, deren Arbeiten, obwohl sie gewisse Punkte der Debyeschen Betrachtung berichtigten und weiter

1) P. Debye, Verh. d. Dtsch. Physik. Ges. 15. S. 738. 1913.

2) M. v. Laue, Ann. d. Phys. 42. S. 1561. 1913.

3) M. Born und Th. v. Karmán, Phys. Ztschr. 14. S. 15 u. 65. 1913; 13. S. 297. 1912.

4) M. Born, Dynamik der Kristallgitter, Leipzig und Berlin 1915 und Atomtheorie des festen Zustandes, Leipzig und Berlin 1923.

5) E. Schrödinger, Phys. Ztschr. 15. S. 79 und 497. 1914.

6) P. Debye, Ann. d. Phys. 43. S. 49. 1914.

7) H. Faxén, Ann. d. Phys. 54. S. 615. 1918 und Ztschr. f. Phys. 17. S. 266. 1923.

8) I. Waller, Ztschr. f. Phys. 17. S. 398. 1923 und Dissertation Uppsala 1925.

entwickelten, doch in ihrem Ergebnis nicht sehr von ihm abwichen. Wir knüpfen hier an Wallers Darstellung an.

Messungen des Wärmeeinflusses auf die Intensität eines Interferenzmaximums haben in den letzten Zeiten Backhurst, James und Nies ausgeführt.<sup>1)</sup> Fast immer<sup>2)</sup> bestätigt sich die Folgerung aus der Theorie, daß der zum sonstigen Intensitätswert hinzutretende Wärmefaktor den Ablenkungswinkel  $\chi$  und die Wellenlänge  $\lambda$  der Röntgenstrahlung nur in der Verbindung  $\sin \frac{1}{2} \chi / \lambda$  enthält. Das ist tröstlich, weil andernfalls eine Interferenztheorie dieses Einflusses unmöglich erschiene. Bei jeder Interferenztheorie kommt nämlich von der Verrückung eines Atoms aus seiner Normallage nur die zur spiegelnden Netzebene senkrechte Komponente in Betracht, und diese nur in ihrem Verhältnis zu  $\lambda$ , was dann unmittelbar zu der genannten Aussage führt. Im übrigen aber bewährt sich die Theorie nicht gut. Nach ihr sollte der Wärmefaktor eine Exponentialfunktion sein, deren negativer Exponent bei nicht zu tiefen Temperaturen zur absoluten Temperatur  $T$  proportional ist. James hingegen kann seine Messungen bei verhältnismäßig hohen Temperaturen gut durch eine Proportionalität des Exponenten zu  $T^2$  darstellen. Und auch Nies findet bei seinen tiefen Temperaturen einen größeren Wärmeeinfluß, als theoretisch vorauszusehen.

Dabei scheint das Ergebnis, daß der Exponent für hohe Temperaturen zu  $T$  proportional ist, eng mit der klassischen Statistik verknüpft und kaum noch mit den besonderen Ver-

1) J. Backhurst, Proc. Roy. Soc. 102. S. 340. 1922; R. W. James, Phil. Mag. 49. S. 585. 1925; E. Nies, Ann. d. Phys. 79. S. 673. 1926. Die Messungen an Quarz von R. E. Gibbs, Proc. Roy. Soc. 107. S. 561. 1925 kommen hierfür nicht in Betracht, weil dabei die Lage der Atome in einer Elementarzelle wechselt und somit der Strukturfaktor stark von der Temperatur abhängt. Solche Vorgänge lassen sich nicht mittels einer von den Verrückungen quadratisch abhängenden potentiellen Energie des Gitters deuten und fallen somit aus dem Rahmen der bisherigen Theorie heraus.

2) J. Backhurst erhält freilich etwas verschiedene Temperatur-Intensitätskurven für Interferenzen 333 bei der  $K_{\alpha}$ - und  $K_{\beta}$ -Linie des Molybdän am Carbonat. Es scheint uns aber angesichts der von allen Experimentatoren betonten Schwierigkeit, dauernde Änderungen des Kristalls bei starker Erwärmung und Abkühlung zu vermeiden, fraglich, ob diesem Unterschied eine Bedeutung zukommt.

hältnissen des einzelnen Kristalls zusammenhängen. In der Näherung, welche die Theorie bisher benutzt, tritt nämlich in den Exponenten zunächst eine Summe über die zeitlich gemittelten Quadrate aller Verrückungen (d. h. ihrer Komponenten senkrecht zur spiegelnden Netzebene). Solange die potentielle Energie eine quadratische Funktion der Verrückungen ist, sollten diese zu  $T$  proportional sein.

Sucht man wegen dieser mangelnden Übereinstimmung mit dem Experiment nach nicht ganz sicher begründeten Punkten in der Rechnung, so kann man einen Verdacht vielleicht gegen den Grundgedanken fassen, welchen Debye der Betrachtung zugrunde legt, und den alle seine Nachfolger beibehalten. Weil nämlich die Wärmeschwingungen gegenüber den Röntgenstrahlen eine sehr kleine Schwingungszahl haben, mittelt Debye<sup>1)</sup> die elektromagnetische Energie zur Berechnung der Intensität zunächst über eine Zeit, in welcher die Atome sich nur wenig von ihrem augenblicklichen Platz fortbewegen, die aber doch sehr viele Röntgenperioden umfaßt, und zwar so, *als ob die Atome ruhten*. Erst die spätere Mittelung über alle Amplituden und Phasen der Wärmeschwingungen beseitigt bei ihm, was in seinem Ergebnis zunächst auf die genannte Lage der Atome hinweist. Das Verfahren ist bisher nie beanstandet worden<sup>2)</sup>; jedenfalls aber ist diese Mittelung in zwei Schritten ungewöhnlich, und wir empfanden das Bedürfnis, sie zur Nachprüfung durch eine dem sonstigen Verfahren der Optik näher angepaßte Berechnung zu ersetzen. Wir wollen sogleich aussprechen, daß dies zweite, in seiner Durchführung ganz andere Verfahren zu denselben Ergebnissen führt, wie das Debyesche; und zwar sowohl, wenn man die Atome als unabhängig voneinander schwingende Gebilde auffaßt, als wenn man — was zweifellos besser ist — ihre Bewegung als Übereinanderlagerung der Eigenschwingungen des Gitters betrachtet. Wir kommen also zu einer Rechtfertigung der alten Betrachtungsweise, und der Vergleich mit der Erfahrung gestaltet sich nicht günstiger. Trotzdem erscheint uns

1) Seite 53 der erwähnten Arbeit von P. Debye, Ann. d. Phys. 43. S. 49. 1914.

2) Auch der Verfasser dieser Arbeit hat sie früher (vgl. Anm. 2 auf S. 877) benutzt.

die Frage nach dem Temperatureinfluß so wichtig, daß wir die Abänderung hier mitteilen möchten.

Wir betrachten zuerst mit einer für unsere Zwecke ausreichenden Näherung<sup>1)</sup> den Streueffekt eines einzelnen Atoms, das um eine Ruhelage nach irgendeinem vorgegebenem Gesetz schwingt. In der Streuwelle treten dann neben der Frequenz der einfallenden Strahlung auch veränderte Frequenzen auf, ähnlich wie ein bewegter Spiegel die Schwingungszahl verändert. Darin liegt der Unterschied gegen Debyes Betrachtungsweise. Bei unserer Intensitätsmittelung über Zeiten, die viele Perioden der Wärmeschwingungen umfassen, können diese Schwingungen nicht als mit solchen von der ursprünglichen Frequenz interferenzfähig angesehen werden; vielmehr addieren sich die entsprechenden Intensitäten. Von dem gewöhnlichen Dopplereffekt eines gleichförmig translatorisch bewegten Atoms unterscheidet sich dieser Vorgang nicht unerheblich. Trotzdem darf man vielleicht auch hier von einem Dopplereffekt bei der Streuung reden, zumal sich beide Effekte als Grenzfälle des allgemeinsten Bewegungseinflusses auffassen lassen. Das Atom fassen wir dabei als Dipol auf, eine Hypothese, die sich leicht abstreifen ließe, falls das wider Erwarten notwendig werden sollte. Das ist der Inhalt von § 2. Sodann zeigen wir in § 3, daß die Annahme von unabhängigen Atomschwingungen ein vom Debyeschen abweichendes Ergebnis zeitigt, während die folgenden Paragraphen die Annahme der Gitterschwingungen benutzen und nachweisen, daß dabei die früheren Ergebnisse erhalten bleiben.

Das Raumgitter beschreiben wir durch die Seiten  $a_1, a_2, a_3$  der Elementarzelle, die wir so wählen, daß das skalare Produkt

$$(a_1 a_2 a_3) = (a_1 [a_2 a_3])$$

positiv wird. Die Zellen numerieren wir mittels der Indizes  $l_1, l_2, l_3$ . Den Kristall denken wir der Einfachheit halber, wie

1) Die Betrachtung knüpft eng an Untersuchungen von G. A. Schott (Proc. Roy. Soc. 96. S. 809. 1915) und M. Yamada (Reports Tohoku University 10. S. 423. 1921) an. Diese aber fragen nach dem Einfluß der Elektronenbewegung im einzelnen Atom, und der Dopplereffekt dieser Bewegungen tritt aus Gründen, die wir noch nicht ganz übersehen, in der Natur wohl nicht auf.



man es stets tut, als Parallelepiped mit an Seiten  $L_1 a_1$ ,  $L_2 a_2$ ,  $L_3 a_3$ ;  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  sollen gerade Zahlen sein.<sup>1)</sup>

$$L_1 L_2 L_3 = N$$

ist dann (in hinreichender Näherung) die Gesamtzahl der Zellen;  $\frac{-L_a}{2}$  und  $\frac{+L_a}{2}$  sind die Grenzen für  $l_a$ . In § 3 setzen wir je ein Atom von der Masse  $m$  in eine Zelle. Später, wo es uns auf die Übereinstimmung mit der Wirklichkeit mehr ankommt, denken wir uns die Basis des Gitters als im allgemeinen aus mehreren ( $s$ ) Atomen von den Massen  $m_k$  zusammengesetzt.  $Ns$  ist somit die Zahl der Atome,  $3Ns$  die Zahl der Freiheitsgrade. Zur Ruhelage des  $k$ -ten Atoms der Zelle  $l_1, l_2, l_3$  führt vom willkürlichen Nullpunkt aus der Vektor

$$(1) \quad \mathbf{r}_{o,k} = \sum_{a=1}^3 (l_a + \delta_a^k) \mathbf{a}_a = (l_a) + (\delta_a^k \mathbf{a}) \quad (0 \leq \delta_a^k \leq 1).$$

## § 2. Der Dopplereffekt des um eine Ruhelage schwingenden Atoms

Die Ruhelage des Atoms bestimmen wir durch den Vektor  $\mathbf{r}_0$ , der von dem willkürlich angenommenen Koordinatenanfang zu ihr hinführt. Die Bewegung setze sich in allgemeinsten Weise aus einer *endlichen* Reihe von Sinusschwingungen mit den Frequenzen  $\omega_a$  zusammen. Diese sind gerade in dem uns interessierenden Falle nicht zueinander harmonisch, wohl aber können einige davon auch einander gleich sein. Und wir halten uns hier die Möglichkeiten offen, in solchem Falle entweder alle Schwingungen derselben Frequenz in ein Glied der Reihe zusammenzufassen, oder jeder dieser Schwingungen (auf deren Unterscheidungsmerkmale wir beim einzelnen Atom nicht eingehen können) einen Summanden der Reihe entsprechen zu lassen. Da sich die allgemeinste Schwingung mit der Frequenz  $\omega_a$  in der Form

$$\mathbf{a}_a \cos \omega_a t + \mathbf{b}_a \sin \omega_a t$$

darstellen läßt, bei der  $\mathbf{a}_a$ ,  $\mathbf{b}_a$  zwei beliebige Vektoren be-

1) Waller braucht bei seiner Abzählung der Eigenschwingungen auf S. 16 bis 17 einer Dissertation die Annahme, daß eine der Zahlen  $L_i$  gerade ist.

deuten, so ist die beschriebene Bewegung des Atoms dargestellt durch den Fahrstrahl

$$(1') \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \sum_a (\mathbf{a}_a \cos \omega_a t + \mathbf{b}_a \sin \omega_a t)$$

vom Anfangspunkt zum Atom.

Auf dies Atom falle nun die ebene, linear polarisierte Welle, deren elektrischer Vektor durch

$$\mathbf{e}^{i\nu \left( t - \frac{1}{c} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_0) \right)}$$

dargestellt ist. Der Einheitsvektor  $\mathbf{s}_0$  gibt ihre Fortpflanzungsrichtung an. Sie erteilt dem Atom, das wir nach dem obigen als Dipol betrachten, ein elektrisches Moment  $f$ , dessen zweiter Differentialquotient nach der Zeit

$$(1'') \quad \ddot{f}(t) = c^2 \Psi e^{i\nu \left[ t - \frac{1}{c} (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s}_0) \right]} \cdot e^{-\frac{i\nu}{c} \sum_a [(\mathbf{a}_a \cdot \mathbf{s}_0) \cos \omega_a t + (\mathbf{b}_a \cdot \mathbf{s}_0) \sin \omega_a t]}$$

ist.  $\Psi$  ist dabei ein Resonanzfaktor, i. a. eine komplexe Größe. Wir dürfen ihn im Röntgengebiet als von  $\nu$  unabhängig betrachten, wie es schon J. J. Thomsons Theorie der Streuung von Röntgenstrahlen tut. Es entfällt damit jedes Bedenken, daß er wegen eines Dopplereffekts für das bewegte Atom nicht einfach angebar sein könnte.

Infolge des Momentes  $f$  entsteht eine gestreute Welle, deren elektrische Feldstärke in großem Abstand vom Atom, und wenn die Richtung vom Atom zum Aufpunkt den Winkel  $\chi$  mit der Schwingungsrichtung bildet, den Betrag

$$(2) \quad E = \frac{\sin \chi}{r c^2} \ddot{f} \left( t - \frac{r}{c} \right)$$

hat.  $r$  ist dabei der Abstand des Atoms vom Aufpunkt im Augenblick  $t - r/c$ . Die Aberrationskorrektur am Winkel  $\chi$  und alle sonstigen Geschwindigkeitskorrekturen haben wir dabei wie in (1'') fortgelassen mit der Begründung, daß wir die Zahlen

$$(3) \quad \sum_a \frac{\omega_a |\mathbf{a}_a|}{c} \quad \text{und} \quad \sum_a \frac{\omega_a |\mathbf{b}_a|}{c}$$

als klein gegen 1 betrachten wollen, denn  $\sum \omega_a |\mathbf{a}_a|$  und  $\sum \omega_a |\mathbf{b}_a|$  sind von der Größenordnung der Geschwindigkeit des Atoms.

Außerdem aber setzen wir voraus: Klein gegen 1 sind die Zahlen

$$(3a) \quad \frac{\nu}{c} \sum_a \omega_a \mathbf{a}_a^2 \quad \text{und} \quad \frac{\nu}{c} \sum_a \omega_a \mathbf{b}_a^2.$$

Die Berechtigung für beide Annahmen müssen wir später nachweisen, wenn wir das abzuleitende Ergebnis auf die Bewegung der Atome im Kristall anwenden. Ohne diese Annahme wäre es nicht leicht, das Streuproblem zu behandeln.

Der Abstand nämlich, welchen das Atom vom Aufpunkt zur Zeit  $t$  hat, berechnet sich innerhalb der Näherung, welche die Interferenztheorie der Röntgenstrahlen benutzt, aus der Entfernung  $R$  des Koordinatenursprungs vom Aufpunkt, den die Lage des Atoms bestimmenden Vektoren  $r_0$ ,  $a_\alpha$ ,  $b_\alpha$  und dem Einheitsvektor  $\hat{s}$  zu:

$$r = R - (r_0 \hat{s}) - \sum_{\alpha} [(a_{\alpha} \hat{s}) \cos \omega_{\alpha} t + (b_{\alpha} \hat{s}) \sin \omega_{\alpha} t].$$

Für die Berechnung desselben Abstandes für die Zeit  $(t - r/c)$  ergibt sich daraus, indem man  $t$  durch  $(t - r/c)$  ersetzt, eine transzendente Gleichung. Die Voraussetzungen (3) aber erlauben, im Argument des Cosinus oder Sinus Größen von der Ordnung von  $\frac{\omega_{\alpha}}{c}(a_{\alpha} \hat{s})$  und  $\frac{\omega_{\alpha}}{c}(b_{\alpha} \hat{s})$  fortzulassen; und aus den Annahmen (3a) folgt, daß der dabei gemachte Fehler auch dann nicht in Betracht kommt, wenn es sich um die Auswertung von  $e^{\frac{i\nu}{c}r}$  handelt. So erhält man als Näherung für den Abstand zur Zeit  $(t - r/c)$ :

$$r = R - (r_0 \hat{s}) - \sum_{\alpha} \left[ (a_{\alpha} \hat{s}) \cos \omega_{\alpha} \left( t - \frac{1}{c} (R - (r_0 \hat{s})) \right) + (b_{\alpha} \hat{s}) \sin \omega_{\alpha} \left( t - \frac{1}{c} (R - (r_0 \hat{s})) \right) \right].$$

Nach (1'') gilt in derselben Näherung

$$\ddot{f} \left( t - \frac{r}{c} \right) = c^2 \psi e^{i\nu \left[ t - \frac{R}{c} + \frac{1}{c} (r_0, \hat{s} - \hat{s}_0) \right]} \cdot e^{\frac{i\nu}{c} \sum_{\alpha} \left[ (a_{\alpha} \hat{s} - \hat{s}_0) \cos \omega_{\alpha} \left( t - \frac{1}{c} (R - (r_0 \hat{s})) \right) + (b_{\alpha} \hat{s} - \hat{s}) \sin \omega_{\alpha} \left( t - \frac{1}{c} (R - (r_0 \hat{s})) \right) \right]};$$

und nach (2) folgt daraus:

$$E = \frac{\sin X}{R} \psi e^{i\nu \left[ t - \frac{R}{c} + \frac{1}{c} (r_0, \hat{s} - \hat{s}_0) \right]} \prod_{\alpha} e^{\frac{i\nu}{c} P_{\alpha} \cos \left[ \omega_{\alpha} \left( t - \frac{1}{c} (R - (r_0 \hat{s})) \right) - \vartheta_{\alpha} \right]}.$$

Dabei ist

$$(4) \quad (a_{\alpha} \hat{s} - \hat{s}_0) \cos \omega_{\alpha} \tau + (b_{\alpha} \hat{s} - \hat{s}_0) \sin \omega_{\alpha} \tau = P_{\alpha} \cos (\omega_{\alpha} \tau - \vartheta_{\alpha})$$

gesetzt, eine Definition, aus der unmittelbar

$$(5) \quad \begin{cases} P_a = \pm \sqrt{(a_a \bar{s} - \bar{s}_0)^2 + (b_a \bar{s} - \bar{s}_0)^2} = \pm |\mathfrak{H}| \sqrt{a_a^2 \bar{s} + b_a^2 \bar{s}}, \\ \operatorname{tg} \vartheta_a = \frac{b_a \bar{s}}{a_a \bar{s}} \end{cases}$$

folgt. Wir entnehmen daraus, daß  $|P_a|/|\mathfrak{H}|$  die Amplitude,  $\vartheta_a$  die Phase derjenigen Komponente der Schwingung  $\omega_a$  ist, welche die Richtung des Vektors

$$(6) \quad \mathfrak{H} = \bar{s} - \bar{s}_0 \quad (|\mathfrak{H}| = 2 \sin \frac{\chi}{2})$$

hat. Die dazu senkrechten Komponenten der Bewegung fallen aus der Formel heraus, wie schon in der Einleitung angekündigt.

Nun brauchen wir uns nur auf die bekannte Fourierreihe

$$(7) \quad e^{i \frac{\nu}{c} P_a \cos \omega_a \tau} = \sum_{-\infty}^{+\infty} i^p I_p \left( \frac{\nu}{c} P_a \right) e^{i p \omega_a \tau}$$

zu berufen, in welcher  $I_p$  die Besselsche Funktion  $p$ -ter Ordnung bedeutet, und erhalten:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} E &= \frac{\sin X}{R} \psi e^{i \nu \left[ t - \frac{R}{c} + \frac{1}{c} (r_0, \bar{s} - \bar{s}_0) \right]} \\ &\prod_a \sum_{-\infty}^{+\infty} i^p I_p \left( \frac{\nu}{c} P_a \right) e^{i p \left[ \omega_a \left( t - \frac{1}{c} (R - (r_0 \bar{s})) \right) - \vartheta_a \right]}. \end{aligned} \right.$$

Durch eine Art Dopplereffekt entstehen in der Streuwelle also neben der Schwingung von der Frequenz  $\nu$  solche von den Frequenzen

$$(9) \quad \nu + \sum_a p_a \omega_a,$$

wobei die Koeffizienten  $p_a$  beliebige positive oder negative ganze Zahlen sind. Wie sich diese in der Stärke zur Schwingung  $\nu$  verhalten, hängt ganz von den Verhältnissen der Amplituden  $|P_a|/|\mathfrak{H}|$  zu der Wellenlänge  $\lambda$  ab. Yamada zeigt in der oben genannten Arbeit<sup>1)</sup> an Beispielen, die allerdings nicht auf unser Problem passen, daß sie zum Teil viel stärker sein können, als jene. Handelt es sich aber bei den  $\omega_a$  um die Eigen-

1) Vgl. Aum. 1 auf S. 880.

schwingungen des Kristallgitters, so ist allerdings jedes  $P_a$  so klein gegen die Wellenlänge, daß man in (8)

$$(10) \quad \begin{cases} I_0\left(\frac{\nu}{c} P_a\right) = 1 - \left(\frac{\nu P_a}{2c}\right)^2, \\ I_p\left(\frac{\nu}{c} P_a\right) = \left(\frac{\nu P_a}{2c}\right)^p \left(1 - \frac{1}{p+1} \left(\frac{\nu P_a}{2c}\right)^2\right) \end{cases}$$

setzen kann. Dann überwiegt in der Intensität durchaus die unbeeinflusste Schwingung  $\nu$ . Und es kommen von den Frequenzen (9) nur solche in Betracht, für welche die Summe aller absoluten Werte  $|p_a|$  klein ist, also vor allem die Frequenzen  $\nu \pm \omega_a$ . Man wird sie wohl nie von der ursprünglichen spektral trennen können, da sie ganz innerhalb der Grenzen liegen, welche durch die spektrale Breite jeder Röntgenlinie bestimmt sind. So gering aber auch  $\omega_a$  sein mag, bei der von uns beabsichtigten Mittelung der Intensität über Zeiten, die gegen  $1/\omega_a$  groß sind, müssen sie als zur ursprünglichen Schwingung interferenzunfähig betrachten.<sup>1)</sup>

In den Streuwellen, welche verschiedene Atome aus derselben einfallenden Welle abbeugen, sind unbedingt interferenzfähig nur die Anteile, welche die Frequenz  $\nu$  besitzen. Die Phasen aller anderen Anteile sind nach (8) abhängig von den Phasen  $\vartheta_a$  der Atomschwingungen. Schwingen viele Atome unabhängig voneinander, so addieren sich einfach die Intensitäten aller spektral veränderten Anteile an ihren Streuwellen. Stehen die Atome hingegen alle unter dem Einfluß einer stehenden Welle  $\omega_a$  im Raumgitter, so stimmen sie in der Phase  $\vartheta_a$  miteinander überein; dann geben die Wellen  $\nu \pm \omega_a$ , die von ihnen ausgehen, zu scharfen Interferenzmaxima Anlaß, die nur deshalb nicht mit den beobachtbaren Interferenzpunkten zusammenfallen, weil die Wellenlänge der stehenden Welle eine neue, in den Gitterabständen nicht ausgedrückte Periodizität schafft. Das gleichzeitige Bestehen vieler stehender Wellen bringt es über dies mit sich, daß sich derartige „Geister“ überall auf das engste zusammen-

1) Für langwelligere Strahlung, etwa für sichtbares Licht, macht die Kleinheit des Argumentes  $\frac{\nu}{c} P_a$  in den Besselschen Funktionen  $I_p$  der Gleichung (8) die spektrale Zerlegung unbeobachtbar.

drängen und so die bekannte diffuse Streustrahlung zwischen den Interferenzpunkten ergeben.

Wollte man das Atom in seiner Streuwirkung nicht als Dipol, sondern als ein verwickelteres Gebilde auffassen, so brauchte man nur den Resonanzfaktor, den wir als Atomkonstante eingeführt haben, noch von der Richtung des einfallenden sowie des abgelenkten Strahls abhängig anzunehmen. Gleichung (8) bliebe auch dann richtig.

§ 3. Annahme: Die Atome des Raumgitters schwingen unabhängig voneinander um ihre Ruhelagen

Wie in § 1 angekündigt, wollen wir als Beispiel zur Erläuterung des Unterschiedes zwischen der älteren und der Dopplertheorie den Temperatureinfluß unter der in der Überschrift genannten Voraussetzung ermitteln. Und zwar setzen wir, da es hier nicht so genau darauf ankommt, die klassische Statistik als gültig voraus; oder beschränken uns, anders ausgedrückt, auf hinreichend hohe Temperaturen. Die Bewegungen aller Atome sollen die eine Frequenz  $\omega$  haben.

Diese muß ungefähr übereinstimmen mit der Frequenz  $2\pi \frac{h}{k} \Theta$ , in der  $\Theta$  die für die Atomwärme kennzeichnende Temperatur bedeutet. Ferner muß, wenn  $m$  die Masse eines Atoms ist,

$$\frac{1}{2} m \omega^2 (a_\delta^2 + b_\delta^2) = k T$$

sein. Denn  $\sqrt{a_\delta^2 + b_\delta^2}$  ist die Amplitude der Schwingung in der Richtung  $\mathfrak{S}$ , auf die es nach § 2 allein ankommt.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich für einen Stoff vom Atomgewicht 10 und von der kennzeichnenden Temperatur  $500^\circ$ , sowie für  $T = 300^\circ$

$\omega$  von der Größenordnung  $10^{13} \text{ sec}^{-1}$

$\sqrt{a_\delta^2 + b_\delta^2}$  „ „ „  $10^{-8} \text{ cm.}$

Da nach (6) und (5)

$$|\mathfrak{S}| = 2 \sin \frac{\chi}{2}, \quad P = 2 \sin \frac{\chi}{2} \sqrt{a_\delta^2 + b_\delta^2}$$

ist, ist somit auch  $P$  von der Größenordnung  $10^{-8} \text{ cm.}$ , und  $\frac{\chi}{c} P$  kann immerhin Werte wie 10 oder 20 annehmen. Die Näherungsformeln (10) wären hier also nicht anwendbar; hin-

gegen treffen die Voraussetzungen (3) und (3a) durchaus auf diesen Fall zu.

Hier ist die Formel (8) besonders leicht anwendbar, weil erstens das Produkt nur einen Faktor hat und zweitens nach unserer Annahme die Phasen  $\vartheta$  bei verschiedenen Atomen in keinerlei Beziehung stehen. Alle Schwingungen von veränderter Frequenz addieren infolgedessen ihre Intensitäten, nur die in ihnen enthaltenen Schwingungen  $\nu$  geben zu beobachtbaren Interferenzen Anlaß, weil ihre Phase von den  $\vartheta$ -Werten nicht beeinflußt wird. Der Anteil dieser Schwingung an der elektrischen Feldstärke  $E$  ist aber für das Atom, dessen Ruhelage durch den Vektor

$$r_0 = \sum_{a=1}^3 l_a a_a = (l a) \quad \begin{array}{l} (l_a \text{ drei ganze Zahlen})^1 \\ (a_a \text{ die Seiten der Elementarzelle}) \end{array}$$

bestimmt ist:

$$E_r^l = \frac{\sin X}{R} \psi \cdot I_0 \left( \frac{\nu}{c} P_l \right) \cdot e^{i \nu \left( t - \frac{R}{c} \right) + i (l A)},$$

$$\left[ (l A) = \sum_{a=1}^3 l_a A_a, A_a = \frac{\nu}{c} (a_a \cdot \hat{s} - \hat{s}_0) \right].$$

$P_l$ , oder ausführlicher geschrieben,  $P_{l_1 l_2 l_3}$ , ist dabei der Wert von  $P$  für das genannte Atom. Die gesamte Intensität ist infolgedessen, wenn wir allen  $P_l$  bestimmte Werte (von der angegebenen Größenordnung) zuschreiben:

$$I_r = \frac{\sin^2 X}{R^2} |\psi|^2 \sum_l \sum_l I_0 \left( \frac{\nu}{c} P_l \right) \cdot I_0 \left( \frac{\nu}{c} P_{l'} \right) e^{i (l - l', A)}.$$

Zur Beobachtung kommt aber nur die mathematische Hoffnung  $\bar{I}_r$ .

Ist  $l$  von  $l'$  (genauer: das Tripel  $l_1, l_2, l_3$  von  $l'_1, l'_2, l'_3$ ) verschieden, so ist die mathematische Hoffnung des Produktes

$I_0 \left( \frac{\nu}{c} P_l \right) I_0 \left( \frac{\nu}{c} P_{l'} \right)$  gleich

$$\overline{I_0 \left( \frac{\nu}{c} P \right)^2}$$

1) Vgl. § 1.

unabhängig von den Nummern  $l$  und  $l'$  der Atome. Stimmen hingegen  $l$  und  $l'$  überein, so ergibt sich dafür

$$\overline{I_0^2 \left( \frac{\nu}{c} P \right)}.$$

Indem wir also aus der Doppelsumme nach  $l$  und  $l'$  die  $N$  Glieder mit  $l = l'$  aussondern und den Rest mit  $\Sigma \Sigma^*$  bezeichnen, finden wir

$$\bar{I}_\nu = \frac{\sin^2 X}{R^2} |\psi|^2 \left[ \overline{I_0^2 \left( \frac{\nu}{c} P \right)} \Sigma \Sigma^* e^{i(l-l', A)} + N \overline{I_0^2 \left( \frac{\nu}{c} P \right)} \right].$$

Die Restsumme aber berechnen wir, indem wir zunächst die fehlenden Glieder wieder hinzufügen, um sodann ihren Gesamtwert  $N$  wieder abzuziehen. Also ist

$$\Sigma \Sigma^* e^{i(l-l', A)} = \prod_{a=1}^3 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} L_a A_a}{\sin^2 \frac{1}{2} A_a} - N,$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{I}_\nu &= \frac{\sin^2 X}{R^2} |\psi|^2 \times \\ &\left\{ \overline{I_0^2 \left( \frac{\nu}{c} P \right)} \prod_{a=1}^3 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} L_a A_a}{\sin^2 \frac{1}{2} A_a} + N \left( \overline{I_0^2 \left( \frac{\nu}{c} P \right)} - \overline{I_0^2 \left( \frac{\nu}{c} P \right)}^2 \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Zur Intensität der Interferenzmaxima trägt nur der erste der rechtsstehenden Summanden etwas bei. Die anderen ergeben eine ohne scharfe Maxima nach allen Richtungen gestreute Strahlung. Indem wir ihre Berücksichtigung aufschieben, setzen wir für den Wärmefaktor in der Intensität eines Interferenzpunktes:

$$\overline{I_0^2 \left( \frac{\nu}{c} P \right)}^2.$$

Das Wahrscheinlichkeitsgesetz für die Amplitude  $a$  einer eindimensionalen Sinusschwingung von der Frequenz  $\omega$  lautet nach der klassischen Statistik

$$\frac{m \omega^2}{k T} e^{-\frac{m \omega^2}{2 k T} a^2} a da;$$

denn in der Phasenebene hat der Ring zwischen den Bahnkurven mit den Parametern  $a$  und  $a + da$  einen Flächeninhalt proportional zu  $a \cdot da$ . Da sich nach (5)  $P$  um den



Faktor  $2 \sin \chi/2$  von der Amplitude unterscheidet, lautet es für  $P$ :

$$2\alpha e^{-P^2} P dP, \quad \alpha = \frac{m \omega^2}{8 k T \sin^2 \frac{\chi}{2}}$$

Danach ist:

$$\overline{I_0 \left( \frac{\nu}{c} P \right)} = 2\alpha \int_0^\infty P I_0 \left( \frac{\nu}{c} P \right) e^{-\alpha P^2} dP$$

Das Integral läßt sich einfach berechnen, indem man

$$I_0 \left( \frac{\nu}{c} P \right) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left( \frac{\nu P}{2c} \right)^{2n}$$

setzt und Glied für Glied integriert. Es ergibt sich

$$\overline{I_0 \left( \frac{\nu}{c} P \right)} = e^{-\frac{\nu^2}{4c^2 \alpha}}$$

Der Wärmefaktor in der Intensität eines Interferenzmaximums ist infolgedessen

$$(12) \quad \overline{I_0 \left( \frac{\nu}{c} P \right)^2} = e^{-4 \frac{\nu^2}{c^2} \sin^2 \frac{\chi}{2} \frac{k T}{m \omega^2}}$$

in voller Übereinstimmung mit Debye.<sup>1)</sup>

Die diffuse Streustrahlung, die sich zwischen den Interferenzmaxima bemerkbar macht, enthält nach (11) einen Anteil

$$\bar{I}_1 = \frac{\sin^2 \chi}{R^2} |\psi|^2 N \left( \overline{I_0^2 \left( \frac{\nu}{c} P \right)} - \overline{I_0 \left( \frac{\nu}{c} P \right)}^2 \right),$$

der von den Schwingungen mit der unveränderten Frequenz  $\nu$  herrührt, daneben aber auch einen Anteil, der alle anderen Schwingungen  $\nu \pm p\omega$  umfaßt. Wir erinnern an die schon in § 1 gemachte Bemerkung, daß diese anderen Schwingungen, falls die Atombewegungen nicht voneinander abhängen, sich in der Intensität einfach addieren, ohne einen Interferenzeffekt zu geben. Was alle  $N$  Atome als diesen zweiten Anteil ergeben, hat also nach (8) den Betrag

1) Auf ein ursprünglich in unseren Überlegungen vorliegendes Versehen, das das Wahrscheinlichkeitsgesetz betraf und hier zu einem anderen Ergebnis führte, machte Herr Dr. I. Waller in Upsala den Verfasser brieflich aufmerksam.

$$(13) \quad \bar{I}_2 = \frac{\sin^2 X}{R^2} |\psi|^2 N \left\{ \sum_1^\infty \overline{I_{-P}^2 \left( \frac{\nu}{c} P \right)} + \sum_1^\infty \overline{I_P^2 \left( \frac{\nu}{c} P \right)} \right\}.$$

Nach den Regeln

$$I_{-P}^2(x) = I_P^2(x), \quad 2 \sum_1^\infty I_P^2(x) = 1 - I_0^2(x)$$

läßt sich dafür schreiben:

$$\bar{I}_2 = \frac{\sin^2 X}{R^2} |\psi|^2 N \left( 1 - \overline{I_0^2 \left( \frac{\nu}{c} P \right)} \right).$$

Insgesamt ist also die Intensität der Streustrahlung:

$$(14) \quad \boxed{\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \frac{\sin^2 X}{R^2} |\psi|^2 N \left( 1 - \overline{I_0^2 \left( \frac{\nu}{c} P \right)} \right)}$$

Der Vergleich mit (13) ergibt die Temperaturabhängigkeit.

*Wie bei Debye tritt bei der Intensität der diffusen Strahlung als Faktor die Differenz zwischen 1 und dem Temperaturfaktor auf, der für die Interferenzmaxima gilt.*

#### § 4. Die Eigenschwingungen des Kristallgitters und ihr Einfluß bei den Interferenzpunkten

Wir benutzen die auf Born zurückgehende Theorie der Eigenschwingungen in der Form, die ihr Waller gegeben hat.<sup>1)</sup> Zur Festlegung einer Eigenschwingung bedient man sich des durch die Größen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  definierten Phasenpunktes, dessen Bedeutung für Richtung und Wellenlänge  $\bar{\lambda}$  aus den drei Gleichungen<sup>2)</sup>

$$(15) \quad \varphi_\alpha = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}} (\mathbf{a}_\alpha \mathfrak{E})$$

hervorgeht, in denen  $\mathfrak{E}$  den Einheitsvektor in der Wellennormalen bedeutet. Die Schwingung eines Atoms der Zelle  $l_1, l_2, l_3$  ist, soweit sie von dieser Eigenschwingung herrührt, proportional zum Cosinus oder Sinus von

$$(16) \quad (l \varphi) = \sum_{\alpha=1}^3 l_\alpha \varphi_\alpha = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}} ((\sum l_\alpha \mathbf{a}_\alpha) \mathfrak{E}),$$

woraus die Bedeutung von  $\bar{\lambda}$  als Wellenlänge hervorgeht. Die

1) Vgl. Anm. 3), 4) und 8) auf S. 877.

2) L. Waller, Dissertation, Gl. (21).

Richtung ist durch die Verhältnisse der  $\varphi_a$  festgelegt. Die Phasengrößen können die Werte annehmen<sup>1)</sup>

$$(17) \quad \varphi_a = \left(\frac{1}{2} + p_a\right) \frac{2\pi}{L_a} - \pi; \quad (p_a = 0, 1, 2 \dots L_a - 1),$$

es gibt ihrer also  $L_1 L_2 L_3 = N$ , die den sich nach allen drei Richtungen  $-\pi$  bis  $+\pi$  erstreckenden „Phasenkubus“ mit gleichmäßiger Dichte erfüllen (Verteilungssatz von Born und Karmán). Aber Waller zeigt, daß man nur die Hälfte  $K$  dieses Kubus<sup>2)</sup> braucht, um zu allen Eigenschwingungen zu gelangen. Man kann ihn durch irgendeine durch seinen Mittelpunkt gehende Ebene in zwei Hälften zerlegen und die eine fortlassen.

Zu jedem Phasenpunkt gehören  $3s$  Eigenfrequenzen  $\omega_{j\varphi}$  ( $j = 1, 2 \dots s$ ), wo  $s$ , wie erwähnt, die Zahl der der Basis angehörenden Atome bedeutet. Die  $\omega_{j\varphi}$  sind im allgemeinen voneinander verschieden. Jedoch ist in der Literatur schon mehrfach hervorgehoben, daß die Symmetrieelemente des Kristalls unter Umständen mehrere davon gleich machen. Es müssen nämlich alle Phasenpunkte, welche dieselbe Wellenlänge  $\bar{\lambda}$  und kristallographisch gleichwertige Richtungen  $\odot$  ergeben, in den Werten der zugehörigen Frequenzen übereinstimmen. Abgesehen aber von diesen Fällen dürfte es keine einfachen Beziehungen von der Form  $\sum p_a \omega_a = 0$  zwischen den Eigenfrequenzen geben. Zwar rechnet Debye einmal mit Eigenschwingungen, die zueinander harmonisch sind. Aber er tut dies auf Grund der elastischen Kontinuumsgleichungen, die für diese Frage nicht als hinreichend genau zu betrachten sind. Das Dispersionsgesetz, das Born und Karmán<sup>3)</sup> für das lineare Gitter abgeleitet haben, beweist zur Genüge, daß solche Beziehungen wenigstens mit *kleinen* ganzen Zahlen  $p_a$  nicht bestehen. Große Zahlen  $p_a$  aber kommen wegen der Faktoren  $J_p \left(\frac{v}{c} P_a\right)$  in (8) ohnehin für uns nicht in Betracht.

Die Entfernung des  $k$ -ten Atoms in der Zelle  $l_1, l_2, l_3$  in einer der drei willkürlich wählbaren, aufeinander senkrechten

1) I. Waller, Dissertation, Gl. (17).

2) Bei Waller ist  $K$  der ganze,  $K'$  der halbe Phasenkubus. Da wir stets nur den halben brauchen, setzen wir für ihn das Zeichen  $K$ .

3) M. Born und Th. v. Karmán, Physik. Ztschr. 13. S. 297. 1912.

Richtungen  $x_1, x_2, x_3$  von seiner Ruhelage ist dann gegeben durch<sup>1)</sup>

$$(18) \left\{ \begin{aligned} u_{k\alpha}^l &= \frac{1}{\sqrt{m_k}} \sum_K \sum_j \{ (A_{kj\varphi x_\alpha} \cos(l\varphi) - B_{kj\varphi x_\alpha} \sin(l\varphi)) P_{j\varphi} \\ &\quad + (A_{kj\varphi x_\alpha} \sin(l\varphi) + B_{kj\varphi x_\alpha} \cos(l\varphi)) Q_{j\varphi} \}, \end{aligned} \right.$$

wobei  $P_{j\varphi}$  und  $Q_{j\varphi}$  die eigentlichen Freiheitsgrade sind, die unabhängig voneinander nach dem Gesetz

$$(19) \quad P_{j\varphi} = p_{j\varphi} \cos(\omega_{j\varphi} t - \vartheta_{j\varphi}), \quad Q_{j\varphi} = q_{j\varphi} \cos(\omega_{j\varphi} t - \tau_{j\varphi})$$

schwingen. Die  $A_{kj\varphi x_\alpha}$  und  $B_{kj\varphi x_\alpha}$  gehorchen dabei den Gleichungen<sup>2)</sup>:

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_j (A_{kj\varphi x_\alpha} A_{k'j\varphi x_\beta} + B_{kj\varphi x_\alpha} B_{k'j\varphi x_\beta}) \\ &= \frac{2}{N}, \text{ wenn } k = k' \text{ und } \alpha = \beta, \\ &= 0, \text{ sonst} \end{aligned} \right.$$

Diese Formeln beweisen, daß jedes  $A_{kj\varphi x_\alpha}$  und  $B_{kj\varphi x_\beta}$  von der Größenordnung  $1/\sqrt{Ns}$  ist, wo  $Ns$  die bei einem einigermaßen ausgedehnten Kristall sehr große Zahl aller Atome ist. Andererseits sind nach der Quantentheorie die Mittelwerte

$$(21) \quad \overline{p_{j\varphi}^2} = \overline{q_{j\varphi}^2} = \frac{1}{\omega_{j\varphi}^2} \left[ \frac{\frac{\hbar \omega_{j\varphi}}{2\pi}}{\frac{\hbar \omega_{j\varphi}}{2\pi k T} - 1} + L(\omega_{j\varphi}) \right] = g(\omega_{j\varphi}),$$

wenn  $L(\omega_{j\varphi})$  die Nullpunktsenergie darstellt, deren Existenz wir hier als eine offene Frage betrachten. Nach der für  $|x| < 2\pi$  gültigen Entwicklung

$$(22) \quad P(x) = \frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{B_2}{2!}x^2 + \frac{B_4}{4!}x^4 + \dots$$

( $B_i$  die Bernoullischen Zahlen), gilt also für den Fall

$$\frac{2\pi k T}{\hbar \omega_{j\varphi}} \gg \frac{1}{2\pi}$$

$$\frac{\overline{p_{j\varphi}^2}}{m_k} = \frac{\overline{q_{j\varphi}^2}}{m_k} = \frac{1}{m_k \omega_{j\varphi}^2} \left( k T - \frac{\hbar \omega_{j\varphi}}{4\pi} + L(\omega_{j\varphi}) \right).$$

1) Waller, Gleichung (12a) in Verbindung mit (10').

2) M. Born und Th. v. Kármán, Physik. Ztschr. 13. S. 297. 1912. Gleichung (7a).

Für die überwiegende Mehrzahl der Eigenschwingungen ist aber  $\omega_{j\varphi}$  von der in § 3 angegebenen Größenordnung  $10^{13} \text{ sec}^{-1}$ . Ebenso sind die  $\frac{p_j \varphi}{\sqrt{m_k}}$  und  $\frac{q_j \varphi}{\sqrt{m_k}}$  wie damals das  $P$  von der Größenordnung  $10^{-8} \text{ cm}$ . Der Beitrag einer einzelnen Eigenschwingung oder auch aller Eigenschwingungen von gleicher Frequenz zu  $u_{k x_a}^i$  (und jeder Beitrag ist eins der  $P_a$  in Gleichung (8)) ist also gewiß so klein, daß für die Besselschen Funktionen  $J_p$  daselbst Näherungswerte, wie die in (10) angeführten vollkommen ausreichend, und insbesondere Indizes  $p$ , die größer als 1, außer Betracht gelassen werden können. Die grundlegenden Voraussetzungen (3) und (3a) in § 2 sind hier gut erfüllt.

Unabhängig von aller Rechnung erkennt man dasselbe mittels des Überlegung, daß die Energie einer Eigenschwingung höchstens gleich  $kT$  ist, daß der Anteil des einzelnen Atoms an der kinetischen Energie aber, da doch mit Ausnahme weniger alle  $Ns$  Atome von ihr in Mitleidenschaft gezogen werden, von der Größenordnung  $kT/Ns$  sein muß.

Der Anteil der Schwingung  $\nu$  an dem Wert (8) von  $E$  ist unter diesen Umständen, sofern es sich um die Streuung des  $k$ -ten Atoms in der Zelle  $l_1, l_2, l_3$  handelt:

$$(23) \quad E_{\nu k}^i = \frac{\sin X}{R} \psi_k e^{i \left[ \nu \left( t - \frac{R}{c} \right) + (lA) + (\delta^k A) \right]} \prod_{K,j}^* I_0 \left( \frac{\nu}{c} P_{kj\varphi}^i \right).$$

Dabei ist schon für  $r_0$  der am Ende von § 1 angegebene Wert gesetzt. Die Produktbildung ist über alle Phasenpunkte des halben Phasenkubus  $K$  und über alle  $3s$  zum gleichen Phasenpunkt gehörenden Eigenschwingungen auszuführen, jedoch mit der durch den Stern hervorgehobenen Einschränkung, daß etwa vorhandenen gleichen Eigenfrequenzen hier nur ein Faktor entspricht. Wir haben in § 2 die Möglichkeit einer solchen Zusammenfassung aller Schwingungen gleicher Frequenz zu einer betont. Sie ist hier notwendig, weil bei Benutzung der anderen Möglichkeit, jeder Eigenschwingung einen eigenen Faktor entsprechen zu lassen, die Kombination  $\omega_a - \omega_\beta$  für zwei gleiche  $\omega$  wieder einen Anteil zur Schwingung  $\nu$  lieferte. Dies ist jetzt ausgeschlossen, weil bei dieser Rechnungsart

keine zwei Faktoren in dem Produkt von (8) dasselbe  $\omega$  haben. Von den Indizes am  $P_{kj\varphi}^l$  weisen  $l$  und  $k$  auf das in Rede stehende Atom,  $\varphi$  auf den Phasenpunkt und  $j$  auf eine bestimmte der zu ihm gehörenden Eigenschwingungen hin.  $P_{kj\varphi}^l$  ist also gleich dem Produkt von  $2 \sin \frac{1}{2} \chi$  mit der Amplitude des betreffenden Atoms in der Richtung  $\S$ , soweit sie von der Eigenschwingung  $\varphi, j$  herrührt falls sich der Faktor auf eine einzige Eigenschwingung bezieht. Handelt es sich aber um mehrere, einander gleiche Frequenzen, so ist  $P_{kj\varphi}^l$  schon die Amplitude in der genannten Richtung, wie sie sich aus dem Zusammenwirken aller dieser Schwingungen ergibt, multipliziert mit  $2 \sin \frac{1}{2} \chi$ .

Für kleine Werte von  $x$  gilt bis auf Größen von der Ordnung  $x^6$

$$(24) \quad I_0(x) = e^{-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}}.$$

Wir setzen dies in (23) ein, lassen aber sogleich das dem  $x^4$  entsprechende Glied des Exponenten fort, auf das wir überhaupt nur zu dem Zweck hingewiesen haben, zu zeigen, daß bei Fortsetzung der Näherung ein positiver Summand zu dem hier zu berechnenden Wert des Exponenten hinzutritt. Indem wir sogleich über alle Atome summieren, finden wir:

$$\sum_{lk} E_{\nu k}^l = \frac{\sin X}{R} e^{i\nu(t - \frac{R}{c})} \sum_{lk} \psi_k e^{-\frac{\nu^2}{4c^2} \sum_{Kj} (P_{kj\varphi}^l)^2} e^{i((lA) + (\delta^k A))}.$$

Die Intensität ist:

$$I_{\nu} = \frac{\sin^2 X}{R^2} \sum_{ll'kk'} \psi_k \tilde{\psi}_{k'} e^{-\frac{\nu^2}{4c^2} \sum_{Kj} [(P_{kj\varphi}^l)^2 + (P_{k'j\varphi}^{l'})^2]} \cdot e^{i((l-l')A) + (\delta^k - \delta^{k'}A)}.$$

Das Sternzeichen an  $\Sigma^*$  hat dieselbe Bedeutung, wie an dem  $\Pi^*$  in (23);  $\tilde{\psi}_{k'}$  ist der zu  $\psi_{k'}$  konjugiert komplexe Wert.

Hier ist nun das Mittel über alle möglichen Werte der Amplituden und Phasen der Eigenschwingungen zu bilden. Zunächst dürfen wir hier, wo

$$e^{-\frac{x^2}{4}} = 1 - \frac{x^2}{4}$$

ist, diese Mittelbildung im Exponenten von  $e$  vornehmen. Sodann hebt sie die bis hierher erforderliche Sonderbehandlung der Eigenschwingungen gleicher Frequenz auf. Denn setzen sich mehrere Schwingungen gleicher Frequenz am gleichen Massenpunkt mit lediglich vom Zufall abhängigen Phasen zusammen, so ist das mittlere Amplitudenquadrat der resultierenden Schwingung gleich der Summe aus den Amplitudenquadraten der Einzelschwingungen. Wir lassen deshalb den Stern an  $\sum_{Kj}$  von hier an fort. Drittens aber ist

$$(25) \quad \sum_{Kj} (P_{kj\varphi}^l)^2 = \sigma_k$$

von dem Index  $l$  (genauer von den drei Indizes  $l_1, l_2, l_3$ ) unabhängig und kann ohne diesen Index geschrieben werden. Zwar kann eine bestimmte Eigenschwingung ein bestimmtes Atom ganz unberührt lassen. Aber abgesehen von Randatomen kann jener Wert nicht mehr von der Zelle abhängen, die wir ins Auge fassen. Dies bestätigt die Rechnung. Bevor wir sie ausführen, stellen wir noch als Wert der beobachtbaren Intensität der Schwingung  $\nu$  fest:

$$\bar{I}_\nu = \frac{\sin^2 X}{R^2} \sum_{l'l'kk'} \psi_k e^{-\frac{\nu^2}{4c^2} \sigma_k} e^{i(\delta^k A)} \cdot \tilde{\psi}_{k'} e^{-\frac{\nu'^2}{4c^2} \sigma_{k'}} e^{i(\delta^{k'} A)} e^{i(l-l', A)}.$$

Die Summation nach  $l$  und  $l'$  läßt sich hier genau so vollziehen, wie wenn die Atome völlig ruhten, und liefert:

$$(26) \quad \left| \bar{I}_\nu = \frac{\sin^2 X}{R^2} \left| \sum_k \psi_k e^{-\frac{\nu^2}{4c^2} \sigma_k} e^{i(\delta^k A)} \right|^2 \prod_{\alpha=1}^3 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} L_\alpha A_\alpha}{\sin^2 \frac{1}{2} A_\alpha} \right|.$$

Wir holen jetzt die angekündigte Rechnung nach. Eine der bisher willkürlichen Koordinatenrichtungen  $x_\alpha$  legen wir in der Richtung  $\mathfrak{H}$ , in der die allein in Betracht kommende Schwingungskomponente liegt. Die nach dieser Richtung gebildeten Komponenten der Vektoren  $a$  und  $b$  in (1') bezeichnen wir mit  $a$  und  $b$ . Nach (5) und (6) ist

$$(27) \quad (P_{kj\varphi}^l)^2 = 4 \sin^2 \frac{X}{2} \left( (a_{kj\varphi}^l)^2 + (b_{kj\varphi}^l)^2 \right),$$

während sich nach (1')  $a_{kj\varphi}^l$  und  $b_{kj\varphi}^l$  aus der von der Welle  $\varphi, j$  am Atom  $l, k$  hervorgerufenen Verrückung  $u_{kj\varphi}^l$  nach dem Schema berechnen:

$$(28) \quad u_{kj\varphi}^l = a_{kj\varphi}^l \cos(\omega_{j\varphi} t) + b_{kj\varphi}^l \sin(\omega_{j\varphi} t).$$

Nach (18) und (19) ist aber

$$(29) \quad \begin{cases} u_{kj\varphi}^l = \\ \frac{1}{\sqrt{m_k}} \{ p_{j\varphi} (A_{kj\varphi} \cos(l\varphi) - B_{kj\varphi} \sin(l\varphi)) \cos(\omega_{j\varphi} t - \vartheta_{j\varphi}) \\ + q_{j\varphi} (A_{kj\varphi} \sin(l\varphi) + B_{kj\varphi} \cos(l\varphi)) \cos(\omega_{j\varphi} t - \tau_{j\varphi}) \}. \end{cases}$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} a_{kj\varphi}^l &= \frac{1}{\sqrt{m_k}} \{ p_{j\varphi} \cos \vartheta_{j\varphi} (A_{kj\varphi} \cos(l\varphi) - B_{kj\varphi} \sin(l\varphi)) \\ &\quad + q_{j\varphi} \cos \tau_{j\varphi} (A_{kj\varphi} \sin(l\varphi) + B_{kj\varphi} \cos(l\varphi)) \}, \\ b_{kj\varphi}^l &= \frac{1}{\sqrt{m_k}} \{ p_{j\varphi} \sin \vartheta_{j\varphi} (A_{kj\varphi} \cos(l\varphi) - B_{kj\varphi} \sin(l\varphi)) \\ &\quad + q_{j\varphi} \sin \tau_{j\varphi} (A_{kj\varphi} \sin(l\varphi) + B_{kj\varphi} \cos(l\varphi)) \}. \end{aligned}$$

Durch Quadrieren und Addieren schließen wir daraus nach (27):

$$\begin{aligned} (P_{kj\varphi}^l)^2 &= \frac{4}{m_k} \sin^2 \frac{\chi}{2} \{ p_{j\varphi}^2 (A_{kj\varphi} \cos(l\varphi) - B_{kj\varphi} \sin(l\varphi))^2 \\ &\quad + q_{j\varphi}^2 (A_{kj\varphi} \sin(l\varphi) + B_{kj\varphi} \cos(l\varphi))^2 \\ &\quad + 2 p_{j\varphi} q_{j\varphi} \cos(\vartheta_{j\varphi} - \tau_{j\varphi}) (A_{kj\varphi} \cos(l\varphi) - B_{kj\varphi} \sin(l\varphi)) \\ &\quad \quad (A_{kj\varphi} \sin(l\varphi) + B_{kj\varphi} \cos(l\varphi)) \}. \end{aligned}$$

Bei der Mittelbildung über die Amplituden und Phasen der beiden hier betrachteten Schwingungen fällt der letzte Summand fort. Es bleibt nach (21)

$$(30) \quad \overline{(P_{kj\varphi}^l)^2} = \frac{4}{m_k} \sin^2 \frac{\chi}{2} g(\omega_{j\varphi}) (A_{kj\varphi}^2 + B_{kj\varphi}^2),$$

also wird

$$(31) \quad \sigma_k = \sum_{K,j} \overline{(P_{kj\varphi}^l)^2} = \frac{4}{m_k} \sin^2 \frac{\chi}{2} \sum_{K,j} g(\omega_{j\varphi}) (A_{kj\varphi}^2 + B_{kj\varphi}^2).$$

Man ersieht an (30), daß schon infolge des Zusammenwirkens der beiden stehenden Wellen, von denen Gleichung (18) handelt,  $\overline{(P_{kj\varphi}^l)^2}$  von  $l$  unabhängig wird. Dasselbe gilt mithin von  $\sigma_k$ .

Nach (26) liegt alle Intensität der Schwingung  $\nu$  in den Interferenzpunkten, deren Lage durch die Gleichungen

$$A_a = 2h_a \pi$$

bestimmt ist. Da  $\sigma_k$  mit der Temperatur ansteigen muß, be-



dingt die Temperaturerhöhung im allgemeinen eine Schwächung der Intensität. Diese Schwächung kommt aber nicht dadurch zustande, daß die Intensität dieser Schwingungen zum Teil in andere Richtungen geworfen wird, sondern dadurch, daß der Dopplereffekt schon am einzelnen Atom die Intensität der Schwingung  $\nu$  zugunsten anderer Schwingungen verringert. Da nach (26) der Strukturfaktor von der Temperatur abhängt, erscheint es nicht als ausgeschlossen, daß die Intensität in einem gewissen Temperaturintervall einmal ansteigt, und zwar, trotzdem die Gestalt der Gitterbasis, also die Brüche  $\delta^2$ , nach dieser Theorie nicht von der Temperatur abhängen. Die Anstiege der Intensität, welche Gibbs<sup>1)</sup> beim Quarz beobachtet und wohl mit Recht auf Änderungen der Basis zurückführt, fallen hingegen aus dem Rahmen dieser Untersuchung heraus. Solange man die potentielle Energie des Gitters als quadratische Funktion der Atomverrückungen ansetzt, kann man diese Basisänderungen ebensowenig theoretisch erklären, wie die Wärmeausdehnung, mit der sie eng verknüpft sind.

Nach (31) ist der in (26) auftretende Exponent

$$\frac{\nu^3}{4c^2} \sigma_k = \frac{\nu^3}{c^2} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \chi}{m_k} \sum_{Kj} g(\omega_j) (A_{kj\varphi}^2 + B_{kj\varphi}^2).$$

Er stimmt genau überein mit dem Exponenten  $M_k$  in Wallers entsprechender Formel (35). Wählt man dort nämlich die Richtung  $\xi$  zur  $z$ -Achse und bedenkt, daß dann vermöge der Interferenzbedingungen (Braggsches Spiegelungsgesetz) für den Richtungskosinus  $\alpha, \beta, \gamma$  von  $\xi$  und  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  von  $\xi_1$  die Gleichungen

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0, \quad \gamma = -\gamma_0 = \sin \frac{\chi}{2}$$

gelten, setzt man ferner nach Wallers Gleichung (9)

$$|C_{kjs}|^2 = A_{kjs}^2 + B_{kjs}^2$$

und schließlich  $\kappa = \frac{\nu}{c}$ , so erhält man aus seiner Gleichung (35''):

$$M_k = \frac{\nu^3}{c^2} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \chi}{m_k} \sum_{Kj} g(\omega_j) (A_{kjs}^2 + B_{kjs}^2).$$

1) Vgl. Anm. 1 auf S. 878.

Wir finden also genau denselben Wärmefaktor<sup>1)</sup> für die Intensität eines Interferenzpunktes wie die ältere Theorie. Alle Erörterungen über ihn gelten auch für die hier vertretene Dopplertheorie.

Die Beobachtung ergibt stets eine größere Temperaturabhängigkeit, als die Theorie. Man kann sich fragen, ob nicht eine Fortführung der Reihenentwicklung für die Funktion  $I_0$  die Übereinstimmung verbessere. Nach Gleichung (20) kommt dabei aber zu dem negativen Exponenten  $-\frac{1}{2}x^2$ , auf dem die obigen Entwicklungen beruhen, ein notwendig positiver Summand hinzu. Die Frage scheint danach zu verneinen zu sein.

### § 5. Die diffuse Streustrahlung

Um den Interferenzeffekt für die Schwingung  $\nu + \omega$  zu ermitteln, bei der  $\omega$  irgendeine „hervorgehobene“ Eigenschwingungsfrequenz bedeutet, trennen wir zunächst die beiden, bisher zur selben Eigenschwingung gerechneten stehenden Wellen in Gleichung (18), die dort durch  $P_{j\varphi}$  und  $Q_{j\varphi}$  voneinander unterschieden sind. Wir tun dies, damit die Phase  $\vartheta_\alpha$  in Gleichung (8) einen allen Atomen gemeinsamen Wert, nämlich den der Phase der stehenden Welle, erhält. Wir müssen aber nach dem obigen mit der Möglichkeit rechnen, daß dieselbe Frequenz auch noch bei  $m$  anderen Eigenschwingungen auftritt. Wir haben dann  $2m$  auf sie bezügliche Faktoren in (8), die wir mittels der Zahl  $x$  numerieren. Wir setzen jetzt also bei den  $m$  ersten von diesen Faktoren

$$u_{kx\varphi}^i = \frac{1}{\sqrt{m_k}} p_k (A_{kx} \cos(l\varphi_x) - B_{kx} \sin(l\varphi_x)) \cos(\omega t - \vartheta_x);$$

$$0 < x \leq m$$

und nach (5)

$$(32) \quad P_{kx}^i = \frac{2 \sin \frac{1}{2} x}{\sqrt{m_k}} p_x (A_{kx} \cos(l\varphi_x) - B_{kx} \sin(l\varphi_x)),$$

bei den anderen  $m$  Faktoren hingegen

$$u_{kx\varphi}^i = \frac{1}{\sqrt{m_k}} q_k (A_{kx} \sin(l\varphi_x) + B_{kx} \cos(l\varphi_x)) \cos(\omega t - \vartheta_x); \quad m < x \leq 2m$$

1) I. Waller läßt den Index  $\varphi$  in seinen Formeln fort; dieser Unterschied ist rein äußerlich.

$$(33)^1) \quad P_{k\kappa}^l = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \chi}{\sqrt{m_k}} q_{\kappa} (A_{k\kappa} \sin(l\varphi_{\kappa}) + B_{k\kappa} \cos(l\varphi_{\kappa})).$$

Die anderen, nicht hervorgehobenen Eigenschwingungen hingegen behandeln wir in dem Produkt von (8) wie früher, d. h. wir fassen alle, welche die gleiche Frequenz haben, zu je einem Faktor zusammen. Der Anteil der Schwingung  $\nu + \omega$  an der vom Atom  $l, k$  gestreuten Feldstärke  $E_k^l$  wird dann nach (8) in erster Näherung

$$E_{k, (\nu+\omega)}^l = i \frac{\sin X}{R} \psi_k e^{i(\nu+\omega)(t-\frac{R}{c})} e^{i[(lA) + \frac{\omega}{\nu}(lB) + (\delta^k A) + \frac{\omega}{\nu}(\delta^k B)]}, \\ \times \sum_{\kappa=1}^{2m} I_1\left(\frac{\nu}{c} P_{k\kappa}^l\right) e^{-i\vartheta_k} \prod_{Kj}' I_0\left(\frac{\nu}{c} P_{kj\varphi}^l\right).$$

Dabei ist zu setzen:

$$(34) \quad B_a = \frac{\nu}{c} (a_a \delta), \quad (lB) = \sum_{a=1}^3 l_a B_a, \quad (\delta^k B) = \sum_{a=1}^3 (\delta_a^k B_a)$$

und das Zeichen  $\prod'$  weist auf den Ausschluß der  $2m$  hervorgehobenen Schwingungen von der Produktbildung hin.

Nun setzen wir:

$$I_1(x) = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{8}\right) = \frac{x}{2} e^{-\frac{x^2}{8}}; \quad I_0(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}$$

und finden für die Überlagerung der Streuwellen alle Atome:

$$\sum_{lk} E_{k, (\nu+\omega)}^l = \frac{i\nu}{2c} \frac{\sin X}{R} e^{i(\nu+\omega)(t-\frac{R}{c})} \sum_{\kappa=1}^{2m} e^{-i\vartheta_{\kappa}} \\ \sum_{lk} \psi_k e^{i[(\delta^k A) + \frac{\omega}{\nu}(\delta^k B)]} P_{k\kappa}^l e^{-\frac{\nu^2}{4c^2} \left(\sum_{Kj}' (P_{kj\varphi}^l)^2 + \frac{1}{2} (P_{k\kappa}^l)^2\right)} \\ \cdot e^{i[(lA) + \frac{\omega}{\nu}(lB)]}.$$

Hier weist das Zeichen  $\sum'$  entsprechend dem vorhergehenden  $\prod'$  auf den Ausschluß der  $2m$  hervorgehobenen Schwingungen hin. Die zugehörige Schwingungsenergie ist in unserem willkürlichen Maße

1) Je ein Glied der Summe in (18) kommt zustande, indem man die Schwingungen  $\kappa = 1$  und  $\kappa = m+1$ ,  $\kappa = 2$  und  $\kappa = m+2$  usw. zusammenfaßt.

$$\begin{aligned}
 I_{\nu+\omega} &= \frac{\nu^2}{4c^2} \frac{\sin^2 X}{R^2} \\
 &\cdot \sum_{\kappa \kappa'} e^{i(\phi_{\kappa'} - \phi_{\kappa})} \sum_{l' k k'} \psi_k \tilde{\psi}_{k'} e^{i(\delta^k - \delta^{k'}, A + \frac{\omega}{\nu} B)} \\
 &P_{k\kappa}^i P_{k'\kappa'}^{l'} e^{-\frac{\nu^2}{4c^2} \left( \sum_j' (P_{kj\varphi}^i)^2 + (P_{k'j\varphi}^{l'})^2 + \frac{1}{2}(P_{k\kappa}^i)^2 + \frac{1}{2}(P_{k'\kappa'}^{l'})^2 \right)} \\
 &\cdot e^{i(l - l', A + \frac{\omega}{\nu} B)}.
 \end{aligned}$$

Die Mittelung nach den Amplituden und Phasen der Eigenschwingungen vollziehen wir in zwei Schritten, nämlich zuerst nur nach den nicht hervorgehobenen Schwingungen. Dabei können wir wie oben die Mittelung im Exponenten von  $e$  vornehmen. Sie führt bei den Summen über

$$(P_{kj\varphi}^i)^2 \quad \text{und} \quad (P_{k'j\varphi}^{l'})^2$$

auf von  $l$  und  $l'$  unabhängige Werte, wie in § 4 gezeigt (vgl. (30) und (31)). Und da die Zahl der hervorgehobenen Schwingungen auf alle Fälle äußerst gering gegenüber der Gesamtzahl der Eigenschwingungen ist, können wir jetzt erstens die Summanden

$$\frac{1}{2} (P_{k\kappa}^i)^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} (P_{k'\kappa'}^{l'})^2$$

gegen diese Summen vernachlässigen und zweitens in diesen die Beschränkung auf die nicht hervorgehobenen Schwingungen aufheben, also wie in (25)

$$\sum_{Kj} (P_{kj\varphi}^i)^2 = \sum_{K,j} (P_{kj\varphi}^i)^2 = \sigma_k, \quad \sum_{Kj} (P_{k'j\varphi}^{l'})^2 = \sigma_{k'}$$

setzen. Dies führt auf den Wert:

$$\begin{aligned}
 \bar{I}_{\nu+\omega} &= \frac{\nu^2}{4c^2} \frac{\sin^2 X}{R^2} \sum_{\kappa \kappa'} e^{i(\phi_{\kappa'} - \phi_{\kappa})} \sum_{l' k k'} P_{k\kappa}^i \psi_k e^{-\frac{\nu^2}{4c^2} \sigma_k + i(\delta^k, A + \frac{\omega}{\nu} B)} \\
 &\cdot P_{k'\kappa'}^{l'} \tilde{\psi}_{k'} e^{-\frac{\nu^2}{4c^2} \sigma_{k'} - i(\delta^{k'}, A + \frac{\omega}{\nu} B)} \cdot e^{i(l - l', A + \frac{\omega}{\nu} B)}.
 \end{aligned}$$

Nun lassen wir die Mittelung nach Amplituden und Phasen der hervorgehobenen Schwingungen folgen. Wegen der Unabhängigkeit der Phasen  $\phi_{\kappa}$  und  $\phi_{\kappa'}$ , sofern  $\kappa$  und  $\kappa'$  voneinander verschieden sind, bleiben nur die Summanden mit gleichem  $\kappa$  und  $\kappa'$  übrig. Die Mittelung des Produktes  $P_{k\kappa}^i P_{k'\kappa'}^{l'}$  bringt bei der Hälfte der Zahlen  $\kappa$  nach (32) den Ausdruck

$$\overline{P_{k\kappa}^i P_{k'\kappa}^{i'}} = \frac{4 \sin^2 \frac{1}{2} \chi}{m_k m_{k'}} (A_{k\kappa} \cos(l \varphi_\kappa) - B_{k\kappa} \sin(l \varphi_\kappa)) \\ (A_{k'\kappa} \cos(l' \varphi_\kappa) - B_{k'\kappa} \sin(l' \varphi_\kappa)) \overline{p_\kappa^2} \quad (\kappa \leq m),$$

bei der anderen Hälfte nach (33) den Ausdruck

$$\overline{P_{k\kappa}^i P_{k'\kappa}^{i'}} = \frac{4 \sin^2 \frac{1}{2} \chi}{m_k m_{k'}} (A_{k\kappa} \sin(l \varphi_\kappa) + B_{k\kappa} \cos(l \varphi_\kappa)) \\ (A_{k'\kappa} \sin(l' \varphi_\kappa) + B_{k'\kappa} \cos(l' \varphi_\kappa)) \overline{q_\kappa^2} \quad (\kappa > m)$$

hervor. Nach (21) ist

$$\overline{p_\kappa^2} = \overline{q_\kappa^2} = g(\omega).$$

Das Ergebnis der vollständigen Mittelung lautet daher:

$$\overline{I_{\nu+\omega}} = \frac{\nu^2}{c^2} \sin^2 \frac{\chi}{2} \frac{\sin^2 X}{R^2} g(\omega) \\ \left\{ \sum_{\kappa=1}^m \left| \sum_{k,l} \frac{\Psi_k}{\sqrt{m_k}} (A_{k\kappa} \cos(l \varphi_\kappa) - B_{k\kappa} \sin(l \varphi_\kappa)) \right. \right. \\ \left. \left. e^{-\frac{\nu^2}{4c^2} \sigma_k + i \left( \delta_k, A + \frac{\omega}{\nu} B \right)} e^{i \left( l, A + \frac{\omega}{\nu} B \right)} \right|^2 \right. \\ \left. + \sum_{\kappa=m+1}^{2m} \left| \sum_{k,l} \frac{\Psi_k}{\sqrt{m_k}} (A_{k\kappa} \sin(l \varphi_\kappa) + B_{k\kappa} \cos(l \varphi_\kappa)) \right. \right. \\ \left. \left. e^{-\frac{\nu^2}{4c^2} \sigma_k + i \left( \delta_k, A + \frac{\omega}{\nu} B \right)} e^{i \left( l, A + \frac{\omega}{\nu} B \right)} \right|^2 \right\}.$$

Die Summationen nach  $l_1, l_2, l_3$  sind hier leicht zu vollziehen; es ist nämlich

$$(35) \left\{ \sum_{l_a = -1/2 L_a}^{l_a = +1/2 L_a} \sum \sum \cos(l \varphi_\kappa) e^{i(lA)} = \frac{1}{2} \sum \sum \sum [e^{i(l, A + \varphi_\kappa)} + e^{i(l, A - \varphi_\kappa)}] \right. \\ = \frac{1}{2} \left[ \prod_{a=1}^3 \frac{\sin \frac{1}{2} L_a (A_a + \varphi_{a\kappa})}{\sin \frac{1}{2} (A_a + \varphi_{a\kappa})} + \prod_{a=1}^3 \frac{\sin \frac{1}{2} L_a (A_a - \varphi_{a\kappa})}{\sin \frac{1}{2} (A_a - \varphi_{a\kappa})} \right] \\ \left. = \frac{1}{2} [\Pi_\kappa(+ ) + \Pi_\kappa(- )]. \right.$$

$$(36) \sum_{l_a = -1/2 L_a}^{l_a = +1/2 L_a} \sum \sin(l \varphi_\kappa) e^{i(lA)} = \frac{1}{2i} [\Pi_\kappa(+ ) - \Pi_\kappa(- )].$$

Die Einsetzung dieser Werte ergibt:

$$\overline{I_{\nu+\omega}} = \frac{\nu^3}{4c^3} \sin^2 \frac{\chi}{2} \frac{\sin^2 X}{R^2} g(\omega) \sum_{n=1}^{2m} \left| \sum_k \frac{\Psi_k}{\sqrt{m_k}} e^{-\frac{\nu^2}{4c^2} \sigma_k} e^{i(\delta^k A)} \right|^2 \cdot \left| (A_{kn} + i B_{kn}) \Pi_n(+) + (A_{kn} - i B_{kn}) \Pi_n(-) \right|^2,$$

wo in  $\Pi_n(+)$  und  $\Pi_n(-)$  eigentlich  $A_n + \frac{\omega}{\nu} B_n$  statt  $A_n$  zu setzen ist. Aber nach der in (34) gegebenen Definition der  $B$  sind das stets wie die  $A$  mäßig große Zahlen;  $\omega/\nu$  ist aber wohl immer kleiner als  $10^{-6}$ . Also verlegen wir die Maxima der Produkte  $\Pi(+)$  und  $\Pi(-)$  um keinen irgendwie merklichen Betrag, wenn wir in ihnen  $\frac{\omega}{\nu} B_n$  fortlassen. Aus demselben Grunde, und da die  $\delta^k$  echte Brüche sind, haben wir jetzt auch  $i(\delta^k \frac{\omega}{\nu} B)$  im Exponenten von  $e$  gestrichen.

Die Maxima von  $\Pi_n(+)$  und  $\Pi_n(-)$  liegen, wo

$$A_n = 2h_n \pi \mp \varphi_{an}$$

ist; verändern wir ein  $A_n$  um den Betrag  $2\pi/L_n$ , so kommen wir zu einer der dem Maximum nächsten Nullstelle. Nun sind wir die absolut kleinsten Werte eines  $\varphi_a$  nach (17)  $\pm \frac{\pi}{L_n}$ , da wir die  $L_n$  als gerade Zahlen eingeführt haben; die nächst größeren Werte sind schon  $\pm 3 \frac{\pi}{L_n}$ . Nur, wenn die  $\varphi_a$  diese kleinsten Werte haben, überdecken sich die Maxima von  $\Pi_n(+)$  und  $\Pi_n(-)$  zum Teil. Sonst kann man das Produkt aus ihnen gleich Null setzen. Wir lassen es aber überhaupt fort. Denn erstens gäbe die Berücksichtigung in dem genannten Fall nur eine minimale Zusatzintensität zu den großen Maxima der Schwingung  $\nu$  bei  $A_n = 2h_n \pi$ . Zweitens hängt diese ganze Diskussion an der Voraussetzung, daß die  $L_n$  gerade sind, was keine für die Erscheinung wesentliche Voraussetzung sein kann, sondern nur der mathematischen Bequemlichkeit dient. Wir schließen also:

$$(37) \quad \left\{ \overline{I_{\nu+\omega}} = \frac{\nu^3}{4c^3} \sin^2 \frac{\chi}{2} \frac{\sin^2 X}{R^2} g(\omega) \cdot \sum_{n=1}^{2m} \left\{ \left| \sum_k \frac{\Psi_k}{\sqrt{m_k}} e^{-\frac{\nu^2}{4c^2} \sigma_k} e^{i(\delta^k A)} (A_{kn} + i B_{kn}) \right|^2 \Pi_n^2(+) \right. \right. \\ \left. \left. + \left| \sum_k \frac{\Psi_k}{\sqrt{m_k}} e^{-\frac{\nu^2}{4c^2} \sigma_k} e^{i(\delta^k A)} (B_{kn} + i A_{kn}) \right|^2 \Pi_n^2(-) \right\} \right\},$$

wobei

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \Pi_{\kappa}^2(+) &= \prod_{\alpha=1}^3 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} L_{\alpha}(A_{\alpha} + \varphi_{\alpha\kappa})}{\sin^2 \frac{1}{2} (A_{\alpha} + \varphi_{\alpha\kappa})} \\ \Pi_{\kappa}^2(-) &= \prod_{\alpha=1}^3 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} L_{\alpha}(A_{\alpha} - \varphi_{\alpha\kappa})}{\sin^2 \frac{1}{2} (A_{\alpha} - \varphi_{\alpha\kappa})} \end{aligned} \right.$$

zu setzen ist.  $m$  ist die Zahl der Eigenschwingungen von der Frequenz  $\omega$ . Dabei sind je zwei Summanden in (18), bei denen  $P$  und  $Q$  die gleichen Indizes tragen, als eine Eigenschwingung gezählt.

Will man den Anteil der Schwingung  $\nu - \omega$  nach (8) berechnen, so ändert sich, da  $i^{-1}I_{-1} = i \cdot I_1$  ist, gegenüber der durchgeführten Berechnung nur das Vorzeichen von  $\vartheta_{\kappa}$ . Da diese Phasengröße ganz aus dem Ergebnis (37) herausgefallen ist, können wir einfach feststellen:

$$(39) \quad \overline{I_{\nu - \omega}} = \overline{I_{\nu + \omega}}.$$

Die Schwingungen  $\nu \pm \omega_{\alpha} \pm \omega_{\beta}$  erhalten in ihrer Amplitude zwei Funktionen  $I_1$  miteinander multipliziert, oder wenn  $\omega_{\alpha} = \omega_{\beta}$  ist, ein  $I_2$  als Faktor. Sie sind soviel schwächer, als die Schwingungen  $\nu \pm \omega$ , daß wir hier von ihnen absehen wollen.

Man erkennt an (37) und (39), daß die genannten Schwingungen „Geister“ neben den durch (26) angezeigten Hauptmaxima hervorrufen. Aber jeder davon ist außerordentlich schwach gegen die letzteren wegen des Faktors  $\frac{\nu^2}{c^2} \frac{g(\omega)}{m}$ , in welchem  $\frac{g(\omega)}{m}$  das mittlere Amplitudenquadrat einer einzelnen Eigenschwingung  $P_{j\varphi}$  oder  $Q_{j\varphi}$  von der Frequenz  $\omega$  bedeutet. Freilich fallen die Maxima von  $\nu + \omega$  und  $\nu - \omega$  zusammen, und außerdem fallen alle Maxima an dieselbe Stelle, welche den  $3s$  Schwingungen  $\omega_{j\varphi}$  desselben Phasenpunktes  $\varphi$  entsprechen, so daß das  $6s$ -fache des in (37) angegebenen Wertes gleich der wirklichen Intensität ist. Aber das macht immer noch nicht viel aus.

Jedes Maximum der Schwingung  $\nu \pm \omega$  hat übrigens nach (37) einen ihm eigentümlichen Strukturfaktor. Die Zu-

nahme der Streustrahlung mit wachsender Temperatur beruht auf dem Faktor  $g(\omega)$ .

Um unser Ergebnis mit dem von Waller zu vergleichen, muß man dessen Gleichung (37) heranziehen. Allerdings sind dort noch die Interferenzmaxima mitberücksichtigt, die nach unserer Gleichung (8) von Schwingungen von den Frequenzen  $\nu + p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2 \dots$  erzeugt werden. Deswegen muß man sich beim Vergleich auf die Summanden mit  $\nu = 1$  in Wallers Formel beschränken, Daß dann aber vollständige Übereinstimmung besteht, erkennt man unschwer, sobald man bei dem analogen Vergleich am Ende von § 4 die Richtung § zur z-Achse macht.

*Für die diffuse Streustrahlung stimmt also das Ergebnis der Dopplertheorie ebenfalls mit dem der älteren Berechnung überein, mit dem einzigen, der Beobachtung nicht zugänglichen Unterschied, daß diese Streustrahlung nach der Dopplertheorie etwas andere Frequenzen besitzt, als die einfallende. Und auch darin liegt kein sachlicher Widerspruch; denn Debyes Betrachtungsart behauptet die Konstanz der Schwingungszahl nur als Näherung für Zeiten, die gegenüber den Perioden der Eigenschwingungen klein sind. Beim Übergang von einem solchen Zeitabschnitt zum nächsten finden — nach seiner Darstellung — Phasensprünge statt, die unsere Veränderungen der Schwingungszahl einigermaßen vertreten. Immerhin kommt der wahre Sachverhalt hier wohl ein wenig besser zum Ausdruck.*

#### Zusammenfassung

Die hier durchgeführte Abänderung der Methode, den Interferenzeffekt für thermisch bewegte Atome im Raumgitter nach dem Dopplerschen Prinzip zu berechnen, verändert somit von Grund aus den Gang der Rechnung, hingegen nichts an den Ergebnissen des älteren Verfahrens, das damit eine volle Bestätigung findet. Sie vermag daher auch die mangelnde Übereinstimmung mit den Beobachtungen nicht herzustellen; vielmehr bedarf die Theorie wohl noch in anderen Punkten der Abänderung.

Man kann vielleicht schon jetzt sagen, daß man bei dem großen Temperaturintervall, über das sich die Beobachtungen



erstrecken, mit der Annahme einer in den Atomverrückungen *quadratischen* potentiellen Energie nicht auskommt. In der Tat liefert diese Annahme bekanntlich keine Wärmeausdehnung des Kristalls, während sich die Ausdehnung bei den Versuchen in der Temperaturabhängigkeit des Glanzwinkels deutlich bemerkbar macht. Für die an diesem Punkte notwendige Abänderung der Theorie die optische Grundlage zu festigen, war der Zweck der vorliegenden Untersuchung.

Berlin, Juli 1926.

(Eingegangen 23. Juli 1926)

---

**2. Die Bestimmung der optischen Konstanten  
von Metallen im sichtbaren und ultravioletten  
Teil des Spektrums<sup>1)</sup>;  
von Gerhard Pfestorf**

**§ 1. Die Methoden zur Bestimmung der optischen Konstanten  
von Metallen im sichtbaren und ultravioletten Teil des Spektrums**

Die Bestimmung der optischen Konstanten (Brechungsindex  $n$  und Absorptionskoeffizient  $\kappa$ ) von polierten Metallflächen im ultravioletten Teil des Spektrums ist ein noch verhältnismäßig wenig bebautes Feld der experimentellen Physik. Es sind in der Hauptsache nur zwei umfangreichere Arbeiten von R. S. Minor<sup>2)</sup> und W. Meier<sup>3)</sup> erschienen, deren Resultate untereinander differieren. Es schien daher wünschenswert, diese Messungen unter Abänderung der Methode zu wiederholen, um über die mögliche Genauigkeit der Bestimmung der optischen Konstanten im Ultraviolett einen Aufschluß zu bekommen und festzustellen, ob Messungen in Luft an polierten Metallflächen Größen liefern, die man wirklich als optische „Konstante“ eines Metalles bezeichnen kann.

Folgende Methoden stehen zur Messung von  $n$  und  $\kappa$  zur Verfügung:

1. Die Kundtsche Prismenmethode. Diese liefert unmittelbar, aber nur größenordnungsmäßig den Brechungsindex  $n$ .

2. Man bestimmt Haupteinfallswinkel und Hauptazimut oder bei einem beliebigen Einfallswinkel Phasendifferenz und Amplitudenverhältnis der beiden parallel und senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Komponenten und berechnet daraus nach den von Drude angegebenen Formeln die Konstanten  $n$  und  $\kappa$ .

1) Jenaer Dissertation 1926.

2) R. S. Minor, Ann. d. Phys. **10**, S. 581. 1903.

3) W. Meier, Ann. d. Phys. **31**, S. 1017. 1910.

3. Man mißt einmal die auffallende und dann die unter einem Winkel  $\alpha$  an der Metallfläche reflektierte Lichtintensität und berechnet daraus ebenfalls nach Drude  $n$  und  $\kappa$ .

4. Bei durchsichtigen Metallschichten kann man durch Bestimmung des Polarisationszustandes des reflektierten und des durchgehenden Lichtes nach einer von K. Försterling<sup>1)</sup> angegebenen Theorie  $n$  und  $\kappa$  berechnen.

Da in vorliegender Arbeit ausschließlich massive Schichten untersucht werden sollten, kam nur Methode 2 oder 3 in Frage. Hr. Prof. Försterling, auf dessen Anregung am Ende des Wintersemesters 1922/23 diese Arbeit unternommen wurde, schlug zur Messung der Konstanten im ultravioletten Teil des Spektrums die Benutzung der lichtelektrischen Zellen vor.

Unter Anwendung der Methode 3 wurde zunächst versucht, die Intensität des auffallenden und des viermal reflektierten Lichtes bei verschiedenen Einfallswinkeln mit der Photozelle zu messen. Obgleich die endgültigen Messungen nach einer anderen Methode erfolgten, soll die technische Ausführung kurz mitgeteilt werden, da sie vielleicht anderweitig von Nutzen sein kann. Damit die Photozelle beim Vergleich der beiden Lichtbündel ihren Platz unverändert behalten konnte, mußte folgendes Spiegelmodell gebaut werden (Fig. 1). Je zwei Spiegel sind durch Parallelogrammführung stets parallel. Außerdem befindet sich der Spiegel 2 auf einem Arm, der sich bei Drehung des Spiegels 1 um den Winkel  $\alpha$  um den doppelten Winkel  $2\alpha$  dreht. Dadurch trifft der an 1 reflektierte Lichtstrahl auch bei Änderung des Einfallswinkels stets denselben Punkt am Spiegel 2. Die Spiegel 3 und 4 sind durch dieselbe Anordnung miteinander verbunden. Beide Systeme I und II sind durch ein gekreuztes Stahlband so gekoppelt, daß der viermal reflektierte Lichtstrahl stets die Richtung des einfallenden behält. Die Verwendung der Photozellen brachte indes bei dem großen zu untersuchenden Spektralbereich und der geringen Lichtintensität erhebliche Schwierigkeiten mit

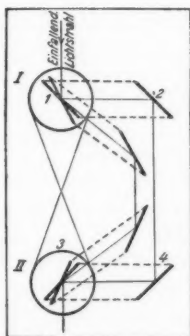


Fig. 1

1) K. Försterling, Gött. Nachrichten 449, 1911.

sich, so daß schließlich auf einen direkten Intensitätsvergleich mit der Photozelle verzichtet wurde und eine für photographische Messung geeignete Ausführung der Methode 2 gewählt wurde.

Die Bestimmung von Haupteinfallswinkel und Hauptazimut oder Phasendifferenz und Amplitudenverhältnis der beiden parallel und senkrecht schwingenden Komponenten kann jedoch nach verschiedenen Arten geschehen:

a) Im sichtbaren Gebiet wird gewöhnlich die Phasendifferenz der beiden Komponenten mittels eines Quarzkeilkompensators gemessen und aufgehoben, worauf mittels Nicols die Lage der wiederhergestellten Polarisationssebene ermittelt wird. Beträgt die Phasendifferenz  $\pi/2$ , so befindet man sich definitionsgemäß im Haupteinfallswinkel. Statt des Quarzkeilkompensators kann man auch eine gerade Anzahl von Metallreflexionen unter gleichem Winkel anwenden. Das am letzten Spiegel reflektierte Licht ist dann und nur dann linear polarisiert, wenn der Einfallswinkel der Haupteinfallswinkel ist. Diese beiden Verfahren erfordern aber die gleichzeitige Veränderung mehrerer Variablen, so daß sie wohl bei okularer Beobachtung rasch zum Ziel führen, bei Photographie aber eine ungewöhnlich große Zahl von Aufnahmen erfordern.

b) Nach einer von W. Voigt<sup>1)</sup> angegebenen Methode durch Ausmessung der Verschiebung eines vektoriellen Interferenzpunktsystems auf einer photographischen Platte, das hervorgerufen wird durch eine Kombination von 4 Quarzkeilen. Diese Methode wurde von Meier und Minor (a. a. O.) angewandt.

c) Unter  $45^\circ$  linear gegen die Einfallsebene polarisiertes Licht wird an einem Metallspiegel reflektiert und durch ein Rochonsches Prisma, Doppelbildprisma<sup>2)</sup>, dessen Polarisationsrichtungen ebenfalls unter  $45^\circ$  gegen die Einfallsebene geneigt sind, in zwei Strahlen zerlegt. Die Intensität der beiden vom Rochonprisma gelieferten Komponenten ist dann und nur dann gleich, wenn das Licht unter dem Haupteinfallswinkel reflektiert wird, denn dann liegen die Hauptachsen des elliptisch polarisierten reflektierten Lichtes parallel und senkrecht zur Einfallsebene und nur in diesem Falle sind, wie aus der

1) W. Voigt, Phys. Zeitschr. 2. S. 303. 1901.

2) Beschreibung z. B. Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik Bd. II, S. 850.

Fig. 2 hervorgeht, die Projektionen der parallel und senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Vektoren auf die Achsen des Rochonprismas gleich (Fig. 2).

Ist so der Haupteinfallswinkel bestimmt, findet man das Hauptazimut zweckmäßigerweise folgendermaßen: Man stellt das Doppelbildprisma mit seinen Achsen parallel und senkrecht zur Einfallsebene und ändert durch Drehung des Polarisators die Komponenten des einfallenden Lichtes so lange, bis das reflektierte Licht zirkular polarisiert ist, also wieder beide Komponenten des Rochonprismas gleich stark sind. Dann gibt die Stellung des Polarisators das Hauptazimut. Durch die hier beschriebene Ausführung erreicht man, daß sowohl zur Messung des Haupteinfallswinkels als auch des Hauptazimuts nur Gleichheit von Lichtintensitäten festgestellt werden muß, was für jede photometrische Methode eine große Vereinfachung bedeutet, weshalb diese Ausführung endgültig gewählt wurde.

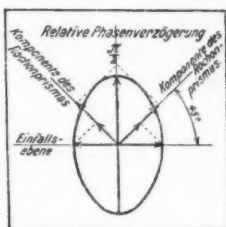


Fig. 2

## § 2. Die endgültig benutzte Ausführung der Methode 2c

Die bei der Arbeit gebrauchte Apparatur besteht aus der Lichtquelle, einer Heraeusquecksilberlampe, dem Monochromator und dem Polarisationspektrometer. Der Strahlengang ist in der Fig. 3 gezeichnet. Der Monochromator und das Polarisationspektrometer sind in der Werkstätte des hiesigen Institutes hergestellt worden. Der Monochromator besitzt Quarzflußspatachromate von 245 und 290 mm Brennweite und einer Öffnung von 20 und 25 mm, Zeissche Projektionsspalte und als Ablenkungsprisma ein Straubelsches 60°-Quarzprisma. Die Mikrometerschraube des Monochromators ist in Wellenlängen sorgfältig ausgewertet. Der Durchmesser der Spaltrohre, in denen sich noch je zwei Blenden befinden, beträgt zur Verminderung des diffusen Lichtes 60 mm. Das Polarisationspektrometer ist folgendermaßen gebaut: Im Brennpunkt eines Quarzflußspatachromaten von 250 mm Brennweite und von 20 mm Öffnung sitzt eine variable Kreisblende 0. Hinter dem Kollimatorrohre befindet sich in einem

vertikalen Teilkreis drehbar der Polarisator; auf dem drehbaren Spektrometerarm sitzt in einem zweiten vertikalen Teilkreis das Rochonprisma. Beide Teilkreise sowie der horizontale, zur Messung des Einfallswinkels dienende Spektrometerarm sind auf Minuten ablesbar. Der Polarisator ist ein Nicolsches Prisma von 15 mm quadratischer Öffnung. Da es für ultraviolette Licht durchlässig sein soll, ist es mit Glyzerin gekittet. Das Rochonprisma hat ebenfalls eine quadratische Öffnung von 15 mm und ist gleichfalls mit Glyzerin gekittet. Versuche, die beiden Kalkspatflächen wie beim Quarz oder

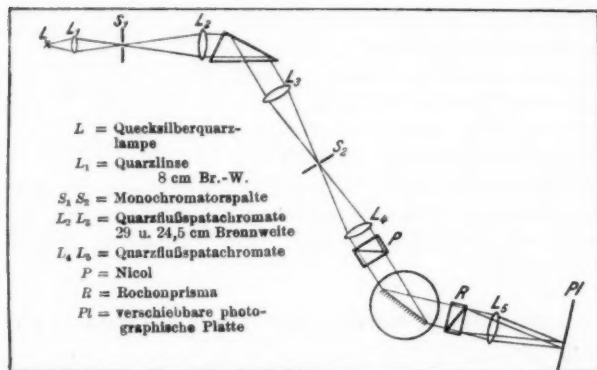


Fig. 3

Glas aufeinander aufzusprengen, führten wegen der allzu leichten Verletzbarkeit der polierten Kalkspatflächen nicht zum Ziel. Unmittelbar auf das Rochonprisma folgt in einem Verschuß das Aufnahmeobjektiv, ein Quarzflußspatachromat von 250 mm Brennweite und einer Öffnung von 25 mm. Dieser Achromat ist in einem Rohr zwecks scharfer Abbildung der Blende 0 verschiebbar angeordnet. Am Ende dieses Rohres sitzt der Halter für die Kassette, die für eine Plattengröße von  $3 \times 12$  cm eingerichtet ist. Da die Lage der Bilder, die das Rochonprisma entwirft, von der Stellung der Achsen des Rochonprismas abhängig ist, ist der Kassettenhalter drehbar um die Achse des Kamerarohres. Es kann dadurch erreicht werden, daß auch bei Bestimmung des Haupteinfallswinkels, wenn nur die lange Seite der Platte ebenso wie das Rochonprisma unter  $45^\circ$  ge-

neigt gegen die Einfallsebene ist, sämtliche Bilder des ordentlichen und des außerordentlichen Strahles auf einer Geraden parallel zur Plattenkante liegen, was für die Photometrierung der Platten von Vorteil ist. Die Größe des Bildes der Kreisblende auf der photographischen Platte beträgt 4 mm im Durchmesser. Die Plattengröße ist so bemessen, daß durch Verschieben der Kassette auch im äußersten gemessenen Ultraviolett noch 10 Aufnahmen auf der Platte Platz finden. Da es kaum möglich gewesen wäre, den Spiegel, der mit großer Sorgfalt auf dem üblichen Spektrometertisch senkrecht aufgestellt ist, im ultravioletten Spektrum bei einer Änderung des Einfallswinkels mit der Hand nachzustellen, ist am Spektrometer nach der von Langley angegebenen Methode eine Vorrichtung angebracht, die bewirkt, daß der Spiegel sich nur um den Winkel  $\alpha$  dreht bei Drehung des Kamerarohres um den Winkel  $2\alpha$ .

Die Ausführung einer Meßreihe geht folgendermaßen vor sich: Nachdem der Polarisator und das Rochonprisma unter  $45^\circ$  gegen die Einfallsebene eingestellt sind und auch die lange Seite der Kassette unter  $45^\circ$  gegen die Einfallsebene geneigt aufgestellt ist, wird eine Serie von 10 Aufnahmen unter Änderung des Einfallswinkels um je  $1^\circ$  in dem Bereich aufgenommen, wo vermutlich der Haupteinfallswinkel liegen wird. Die Belichtungszeiten betragen je nach dem Spektralbereich und dem Spiegelmaterial 5—120 Sek. Zur Aufnahme wurden im sichtbaren Teil des Spektrums (gelbe und grüne Quecksilberlinie) die panchromatischen Agfa-Reproduktionsplatten, im ganzen übrigen Teil des Spektrums die Agfa-Reproduktionsplatten verwandt. Da die Behandlung der Platten für die Genauigkeit der Resultate von Wichtigkeit ist, sei sie ausführlicher wiedergegeben. Alle Platten sind mit völlig frischem Entwickler behandelt worden, und zwar wurde wegen der erhöhten Gefahr einer Schleierbildung bei den panchromatischen Agfa-Platten Glyzinentwickler benutzt, die Reproduktionsplatten sind mit Glyzin oder auch mit Metolhydrochinon entwickelt. Die Platten wurden kräftig (bis zum leichten Schleier des unbelichteten Grundes) entwickelt, in saurem Fixierbad gut fixiert, eine Stunde fließend gewässert, vor dem Aufstellen zum Trocknen mit destilliertem Wasser abgespült, durch einen feinen Haarpinsel von etwaigem Kalkabsatz des Wassers befreit und vor Staub geschützt getrocknet.

Zur Photometrierung der Platten stand mir das Registrierphotometer des hiesigen Institutes zur Verfügung. Die Methode der registrierenden Schwärzungsmessung ist jedoch in diesem Falle nicht die geeignetste, da es sich hier um den Vergleich der *durchschnittlichen* Schwärzung einer Kreisfläche von etwa 4 mm Durchmesser handelt, während das Photometer die Schwärzung von Flächen von etwa  $\frac{1}{100}$  qmm anzeigt, eine Mittelbildung also nachträglich vorgenommen werden müßte. Ich habe deshalb ein lichtelektrisches Photometer selbst zusammengestellt. Die Strahlen einer kleinen Glühlampe werden durch eine Linse parallel gemacht und fallen auf ein als Kondensator dienendes Mikroskopobjektiv. Sie erzeugen in der Ebene des Mikroskoptisches eine verkleinerte Abbildung einer Blende von etwa 3 mm Durchmesser. Dieses Bild wird wieder durch ein Mikroskopobjektiv vergrößert auf der lichtelektrischen Zelle abgebildet. Die Vergrößerung ist nur eine ungefähr vierfache. Die Schaltung der lichtelektrischen Zelle ist die von Elster und Geitel angegebene. Der negative Pol einer Batterie liegt an dem Kaliumbelag der Zelle. Der positive Pol ist über einen hohen Widerstand ( $10^9$  Ohm) mit der Anode der Zelle verbunden. Als Ableitungswiderstand wird ein vom Prof. Krüger-Greifswald hergestellter zerstäubter Platinwiderstand von  $3,5 \cdot 10^9$  Ohm verwandt, der sich bis jetzt ausgezeichnet bewährt hat und natürlich keinerlei Polarisation zeigen kann. Die Kaliumzellen sind uns von Hrn. Dr. Müller-Hamburg freundlichst geliefert worden. Ihre Glimmspannung beträgt ungefähr 150 Volt, die angelegte Spannung war um 10 bis 20 Volt niedriger. Das zur Messung der Photoströme benutzte Meßinstrument ist ein Einfadenelektrometer, das in der hiesigen Institutswerkstätte hergestellt worden ist. Die Dicke des Fadens beträgt  $3\mu$ , die angelegte Schneidenspannung  $\pm 160$  Volt. Die Ablesung der Fadenablenkung geschieht durch ein Okularmikrometer mit 200 Strichen. Die Empfindlichkeit des Instrumentes kann leicht durch Verschieben des Abstandes der Schneiden vom Faden verändert werden und wird immer so gehalten, daß der Ausschlag des Elektrometerfadens bei der am wenigsten geschwärzten Aufnahme einer Serie etwa 100 Skalenteile beträgt. Die zu photometrierende Platte liegt in einem Kreuzschlitten und ist während der Beobachtung des Elektrometerrausschlages um Bruchteile eines Millimeters zu ver-



schieben. Auf diese Weise wird wenigstens annähernd aus dem Verhältnis der Photometerausschläge das Intensitätsverhältnis zweier aufeinanderfolgender Aufnahmen ermittelt. Ist so die Lage des Haupteinfallswinkels z. B. zwischen  $75$  und  $76^\circ$  gefunden worden, so wird eine zweite Serie von etwa 5—6 Aufnahmen unter Änderung des Einfallswinkels um  $1/4^\circ$  aufgenommen und schließlich der zur exakten Gleichheit der beiden Bilder gehörige Haupteinfallswinkel durch lineare Interpolation gewonnen. Ganz ähnlich wird verfahren bei der Bestimmung des Hauptazimuts. Der eingestellte Einfallswinkel ist der nach oben gefundene Haupteinfallswinkel. Kassette und Rochonprisma werden dann in die Einfallsebene gestellt und darauf eine Serie von 10 Aufnahmen unter Änderung des Azimuts des auf den Spiegel fallenden linear polarisierten Lichtes um  $1/2^\circ$  aufgenommen. Das Azimut derjenigen Aufnahme, bei der die Schwärzungen von den beiden durch das Rochonprisma erzeugten Bilder wieder gleich sind, ist das Hauptazimut. Ein Beispiel von zwei solchen Meßreihen gibt Tab. 1.

Tabelle 1

Platte Nr. 289,  $\lambda = 546 \mu\mu$ , Siliciumspiegel (Grobeinstellung)

$\bar{\varphi}$	$a_0$	$a_e$	$a_0/a_e$
79,0°	60	35	1,715
78,5	55	40	1,375
78,0	50	45	1,110
77,5	50	55	0,908
77,0	46	58	0,793
76,5	44	60	0,733
76,0	41	64	0,641

Platte Nr. 297,  $\lambda = 546 \mu\mu$ , Siliciumspiegel (Feineinstellung)

$\bar{\varphi}$	$a_0$	$a_e$	$a_0/a_e$
78,25°	78	58	1,345
78,00	72	65	1,115
77,75	65	70	0,929
77,50	64	72	0,889
77,25	61	72	0,847

Es bedeutet  $\bar{\varphi}$  den Einfallswinkel,

$a_0$  den Photometerausschlag für das dem ordentlichen Strahl zugehörige Bild,

$a_e$  den dem außerordentlichen Bild entsprechenden Photometerausschlag.

Aus den Ausschlägen für die Einstellungen bei  $78,00^\circ$  und  $77,75^\circ$  ergibt sich endgültig:

$$\bar{\varphi} = 77^\circ 51'.$$

Die Berechnung von  $n$  und  $\kappa$  aus dem Haupteinfallswinkel  $\bar{\varphi}$  und dem Hauptazimut  $\bar{\psi}$  erfolgte nach den strengen Formeln von Drude<sup>1)</sup>, die im Spezialfall des Haupteinfallswinkels und des Hauptazimuts die einfachere Form annehmen:

$$\kappa = \operatorname{tg} \frac{\chi}{2}, \quad \operatorname{tg} \chi = \frac{\operatorname{tg}^2 \bar{\varphi} \sin 4 \bar{\psi}}{\operatorname{tg}^2 \bar{\varphi} \cos 4 \bar{\psi} + 1},$$

$$n^2 = \frac{\sin^2 \bar{\varphi} \operatorname{tg}^2 \bar{\varphi} \cos 4 \bar{\psi} + \sin^2 \bar{\varphi}}{1 - \kappa^2}.$$

Als *Extinktionskoeffizient* wird das Produkt ( $n \kappa$ ) bezeichnet; das *Reflexionsvermögen*  $R$  eines Metalles ist durch die Gleichung gegeben:

$$R = \frac{n^2(1 + \kappa^2) + 1 - 2n}{n^2(1 + \kappa^2) + 1 + 2n}.$$

*Die Genauigkeit der Methode.* Die größten Schwankungen der Winkelmessungen betragen bei identischen Aufnahmen 6 bis 8 Minuten. Eine Fehlerquelle liegt in der photographischen Platte. Es ist nötig, vor Beginn der eigentlichen Aufnahmen die Güte der zur Verwendung kommenden photographischen Platten zu prüfen und festzustellen, ob eine photographische Platte bei gleichmäßiger Belichtung gleichmäßig geschwärzt wird. Es wurde deshalb durch eine Photometerkugel, wie sie in der demnächst erscheinenden Dissertation von Hrn. Schacht-schabel näher beschrieben wird, festgestellt, daß bei gleichmäßiger Belichtung eine Agfa-Reproduktionsplatte normalerweise keine größeren Schwankungen zeigt, als bei der angewandten Methode einem Winkelfehler von 2—4 Minuten entspricht. Allerdings kann das nicht von allen Platten gesagt werden, und es sind auch bei den von mir benutzten Plattensorten größere Fehler vorgekommen, die schon mit bloßem Auge erkennbar waren. Solche fehlerhafte Platten sind natürlich nicht benutzt worden.

Die oben angegebene Genauigkeit ist der der von Meier und von Minor benutzten Methode annähernd gleich, im

1) P. Drude. Wied. Ann. **64**. S. 162. 1898.

ultravioletteten Teil des Spektrums ist sie sogar größer. Der Fehler der Winkelbestimmung bewirkt, wie man durch Differenzieren der Drudeschen Formel leicht ableiten kann, sowohl beim Brechungsindex  $n$  als beim Absorptionskoeffizienten  $\kappa$  eine Unsicherheit von höchstens 7 Einheiten der zweiten Dezimale.

### § 3. Der Einfluß von Oberflächenschichten und unvollkommener Politur

Die Ergebnisse mehrerer Messungen an verschiedenen Proben desselben Metalls sind untereinander etwas verschieden. Denn die Reflexion an Metallspiegeln wird kompliziert durch die Existenz einer Oberflächenschicht. Solch eine Oberflächenschicht besteht immer, so wie wir sie auch an durchsichtigen Körpern nachweisen können. Man besitzt aber bei den Metallen kein technisches Mittel, um sie mit Bestimmtheit von dieser Oberflächenschicht zu befreien, so wie es bei den durchsichtigen Körpern durch ihre kristalline Spaltbarkeit oder bei Flüssigkeiten durch ihre chemische Reinigung möglich ist. Diese Oberflächenschicht wird einmal herrühren von einer adsorbierten Gas- oder Oxydschicht des Metalles. Daß diese einen merklichen Einfluß auf die optischen Konstanten des Metalles hat, zeigt die Arbeit von Ellerbroek<sup>1)</sup>, welcher bei frischen Quecksilberschichten in Luft und Wasserstoff folgende Änderungen des Brechungsindex findet:

für Luft . . . . .	+ 0,13,
für Wasserstoff . . . . .	+ 0,10.

Ferner aber werden die Werte der optischen Konstanten auch von der Güte der Politur sehr stark beeinflusst. Um diese Einflüsse näher zu studieren, wurden folgende Versuche unternommen.

a) *Einfluß einer Oberflächenschicht.* Um den Einfluß einer Oberflächenschicht von Wasser auf die optischen Konstanten festzustellen, habe ich den Nickelspiegel, der von der Firma Zeiss bis zum höchsten Glanze nach einem Verfahren, das nicht näher angegeben werden kann und das wir im folgenden

1) J. Ellerbroek, Der Invloed der temperatuur op geadsorbeerte Gaslagen en op de optische constanten bij kwik. Proefschrift Paris-Amsterdam 1926.

mit Poliermittel X bezeichnen wollen, poliert war, gemessen (Kurve a in Fig. 4) und dann eine Stunde in fließendes Wasser gelegt. Der Spiegel wurde darauf mit destilliertem Wasser abgespült, getrocknet und wieder gemessen (Kurve b der Fig. 4). Die auftretenden Änderungen bei  $\bar{\varphi}$  und  $\bar{\psi}$  waren zwar noch

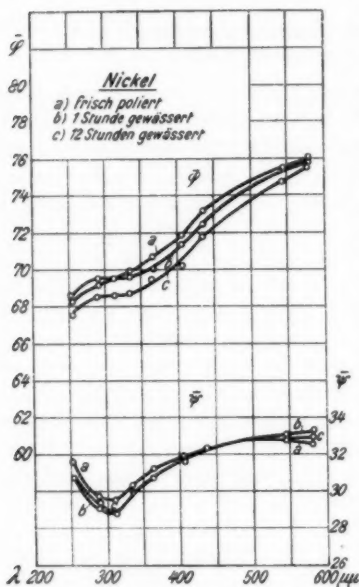


Fig. 4

Kupfer wurden die Änderungen der optischen Konstanten, welche ein ähnlicher grober Eingriff hervorruft, untersucht. Der Kupferspiegel wird meist schon nach einigen Tagen durch Stehen an der Luft sichtlich verändert. Das bedeutet natürlich auch eine starke Änderung der optischen Konstanten, hervorgerufen durch diese Oxydschicht. Ich habe deshalb den Kupferspiegel so schnell als möglich nach Herstellung einer einwandfreien Politur gemessen und ihn nach der Messung mit einem Wattebausch, der mit Alkohol getränkt war, abgerieben. Auch hier trat eine Verkleinerung des Haupteinfallswinkels ein. Der

gering, überschritten aber bereits die Beobachtungsfehler. Ich habe den Spiegel wieder in fließendes Wasser gelegt und ihn 12 Stunden gewässert, mit destilliertem Wasser nachgespült, getrocknet und gemessen. Die Abweichungen von dem mit Wasser nicht in Berührung gekommenen Spiegel sind jetzt größer (Kurve c in Fig. 4). Der Haupteinfallswinkel ist im ganzen Verlauf kleiner. Der Verlauf der Kurven bestätigt die schon von Drude<sup>1)</sup> ausgesprochene Behauptung, daß eine Oberflächenschicht den Haupteinfallswinkel verkleinere, daß die Änderungen beim Hauptazimut jedoch geringer sind. Auch bei

1) P. Drude, Wied. Ann. 39. S. 488. 1890.

Verlauf der  $\bar{\varphi}$ - und  $\bar{\psi}$ -Kurven ist in der Fig. 5 gezeichnet. Diese relativ kleinen Änderungen von  $\bar{\varphi}$  und  $\bar{\psi}$  rufen doch schon ziemlich erhebliche Änderungen von  $n$  und  $\kappa$  hervor. Ich habe deshalb in der Fig. 6 den Verlauf der für die Kurven von  $\bar{\varphi}$  und  $\bar{\psi}$  berechneten  $n$ - und  $\kappa$ -Kurven gezeichnet. Eine große

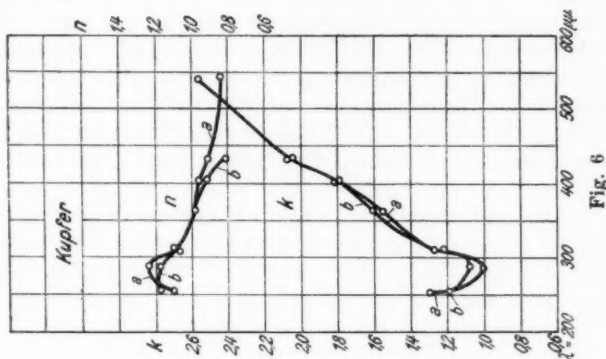


Fig. 6

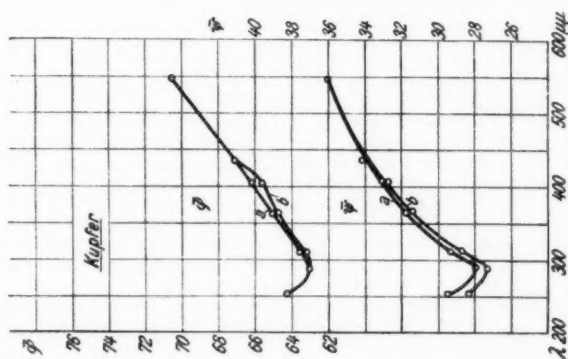


Fig. 5

Sicherheit der Zahlen ist hiernach überhaupt nicht zu erwarten.

b) *Einfluß der Politur.* Einen noch größeren Einfluß auf die optischen Konstanten wie die Oberflächenschicht hat jedoch die Politur, denn jeder Kratzer bedingt natürlich mikroskopisch in seinem Bereich einen anderen Einfallswinkel als der makroskopisch gemessene. Ich habe, um diesen Einfluß zu unter-

suchen, beim Stahl, der sich zum Polieren wegen seiner Härte ganz besonders gut eignet, Versuche mit verschieden guter Politur angestellt. Der Stahlspiegel wurde zuerst mit Poliermittel X in relativ kurzer Zeit, etwa 12 Stdn., bis zum äußersten Hochglanz poliert und gemessen. Dann wurde derselbe Spiegel absichtlich etwas zerkratzt und darauf nur mit Polierrot neu poliert, bis die Spiegeloberfläche wieder einigermaßen durchpoliert erschien. Das dauerte beim Polieren mit Rot schon viel länger und der Spiegel war nur mit Mühe gut zu erhalten. Nun wurde der Spiegel gemessen und lieferte Werte, die von den Werten, die an dem mit Poliermittel X polierten Spiegel gewonnen waren, abwichen. Der Spiegel wurde mehrmals mit Polierrot poliert und jedesmal unterschieden sich die Werte für  $\bar{\varphi}$  und  $\bar{\psi}$  unter sich und von den mit Poliermittel X gewonnenen. Um ein Beispiel zu geben, sind zum Vergleich in der Tab. 2 die Werte zusammengestellt, die a) an dem mit Poliermittel X, b) an dem mit Rot polierten Spiegel gewonnen worden sind.

Tabelle 2

Beobachtungen am Stahlspiegel bei verschiedenen Polituren  
a) mit Poliermittel X, b) mit Polierrot.

$\lambda$	$\bar{\varphi}$		$\bar{\psi}$		$n$		$\alpha$		$n \alpha$		$R^0/v$	
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
578	79°06'	74°22'	29°17'	28°51'	2,70	1,92	1,58	1,46	4,27	2,80	66,1	53,1
546	78 35	73 32	30 24	28 04	2,42	1,75	1,72	1,42	4,16	2,48	66,6	48,9
436	76 36	71 39	31 07	30 20	1,96	1,48	1,79	1,59	3,51	2,36	63,0	49,4
406	75 34	70 53	31 12	28 10	1,81	1,61	1,79	1,33	3,23	2,14	60,6	37,9
366	74 27	70 35	30 48	28 06	1,74	1,59	1,69	1,32	2,85	2,09	57,0	42,5
313	72 12	68 36	31 00	26 48	1,47	1,52	1,69	1,16	2,48	1,77	52,1	35,8
281	70 57	66 40	30 18	26 18	1,43	1,42	1,57	1,08	2,24	1,54	47,7	21,4
254	69 54	65 29	28 55	24 39	1,47	1,45	1,38	0,94	2,03	1,36	42,5	26,2

Durch außerordentlich langes und vorsichtiges Polieren war eine Annäherung an die Werte des mit X polierten Spiegels zu erreichen, die Werte von  $\bar{\varphi}$  und  $\bar{\psi}$  blieben jedoch stets noch um etwa  $1^\circ$  kleiner. Die Größe des Haupteinfallswinkels war direkt ein Zeichen für die Güte des Spiegels. Der Stahlspiegel wurde darauf nicht nur mit Eisenoxyd, sondern auch mit Chromoxyd poliert. Die Ergebnisse waren ähnlich wie bei dem mit Polierrot polierten. Auch hier war eine Politur, die man bei äußerem Anblick als sehr gut bezeichnen konnte, nur schwierig zu erreichen. Der Spiegel zeigte leicht ein etwas mattes Aussehen.

Der Vergleich des Einflusses der Oberflächenschicht und der Güte der Politur zeigt, daß eine unvollkommene Politur einen viel größeren Einfluß auf das Resultat ausübt als eine Oberflächenschicht. Ich habe mich daher in bezug auf die Oberflächenschicht darauf beschränkt, den Spiegel so schnell als möglich nach der Politur zu messen. Die Spiegel wurden ausschließlich mit X, dem scheinbar besten Metallpoliermittel, bis zum höchstmöglichen Glanze und möglichst vollkommener Kratzenfreiheit poliert. Da die nach dem auf langjähriger Erfahrung beruhenden Polierverfahren erzielte Politur im Laboratorium kaum in dieser Güte und Gleichmäßigkeit erreicht werden dürfte, erscheint der Schluß berechtigt, daß die so gewonnenen Werte den wahren optischen Konstanten näher kommen als alle bisherigen Messungen.

#### § 4. Resultate und Vergleich mit früheren Beobachtungen

Die Messungen dieser Arbeit stimmen mit denen von Minor und Meier im großen ganzen überein. Vorkommende größere Abweichungen finden ihre Erklärung meist in der chemischen Verschiedenheit des untersuchten Spiegelmateri als und der Politur.

1. *Nickel*. Die in dieser Arbeit für die Quecksilberlinien gemessenen Werte von  $\bar{\varphi}$  und  $\bar{\psi}$  und die berechneten Werte für  $n$ ,  $z$ ,  $nz$ ,  $R$  sind folgende.

Tabelle 3

$\lambda$	$\bar{\varphi}$	$\bar{\psi}$	$n$	$z$	$nz$	$R\%$
578	75° 54'	32° 58'	1,63	2,10	3,42	65,0
546	75 23	32 48	1,59	2,06	3,27	63,4
436	73 18	32 24	1,42	1,94	2,76	54,0
406	71 49	31 48	1,36	1,80	2,45	53,0
366	70 42	31 12	1,33	1,69	2,24	49,1
334	69 54	30 28	1,32	1,57	2,07	45,4
313	69 27	29 54	1,35	1,49	2,01	43,5
289	69 12	29 42	1,35	1,46	1,97	42,5
254	68 18	31 36	1,14	1,69	1,92	44,9

Die Fig. 7 stellt den Vergleich mit Meier dar, welcher allein denselben Spektralbereich untersucht hat. Der Gang von  $n$  und  $z$  stimmt gut überein, während die Beträge selbst etwas abweichen, wofür die in § 3 erörterten Ursachen in Frage kommen. Der Vergleich mit den älteren Arbeiten im sichtbaren

Gebiet ist bei Meier (a. a. O.) durchgeführt. Die nach der Methode 1 von Kundt<sup>1)</sup>, du Bois und Rubens<sup>2)</sup> und Pflüger<sup>3)</sup> ermittelten Werte von  $n$  sind durchweg um etwa 10–15 Proz. höher als die Werte dieser Arbeit.

Der Extinktionskoeffizient ist von W. Rathenau<sup>4)</sup> durch Absorptionsmessung direkt ermittelt worden. Seine Werte be-

tragen indes nur etwa die Hälfte der nach den anderen Methoden in guter Übereinstimmung untereinander berechneten Zahlen.

Das Reflexionsvermögen ist unmittelbar von Hagen und Rubens<sup>5)</sup> bis in das ultraviolette Gebiet des Spektrums verfolgt worden. Die dort gefundenen Werte liegen höher als die aus den Zahlen von Meier folgenden, aber noch niedriger als die in vorliegender Arbeit ermittelten, z. B. bei  $250 \mu\mu$  Meier 30,7, Hagen und Rubens 37,8, Pfestorf 44,9. Im Sichtbaren besteht ziemlich gute Übereinstimmung.

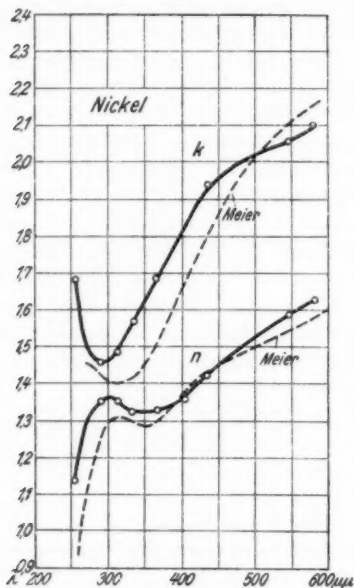


Fig. 7

2. Kupfer. Die von mir an einem gut polierten Kupferspiegel gemessenen Werte zeigt die Tab. 4.

Der Vergleich mit den älteren Arbeiten, die für den Brechungsindex im Sichtbaren teils größere, teils kleinere Werte liefern, findet sich bei Minor (a. a. O.). Den Vergleich der von mir gefundenen Werte von  $n$  und  $\kappa$  mit den Werten von Minor

1) A. Kundt, Wied. Ann. **34**. S. 468. 1898.

2) H. du Bois und Rubens, Wied. Ann. **41**. S. 520. 1890.

3) A. Pflüger, Wied. Ann. **56**. S. 424. 1895.

4) W. Rathenau, Diss. Berlin 1889.

5) E. Hagen und H. Rubens, Ann. d. Phys. **8**. S. 1. 1902.



Tabelle 4

$\lambda$	$\Phi$	$\Psi$	$n$	$x$	$n x$	$R^0/o$
546	70° 31'	36° 00'	0,93	2,56	2,39	60,5
436	67 05	34 01	0,90	2,05	1,84	48,4
406	66 12	32 47	0,95	1,79	1,70	43,3
366	65 07	31 49	0,97	1,60	1,56	38,4
313	63 36	29 18	1,07	1,26	1,35	30,0
289	63 00	27 56	1,23	0,99	1,22	30,1
254	64 17	29 24	1,09	1,30	1,42	31,5

liefert die Fig. 8. Der Verlauf der Dispersionskurve ist angenähert der gleiche.

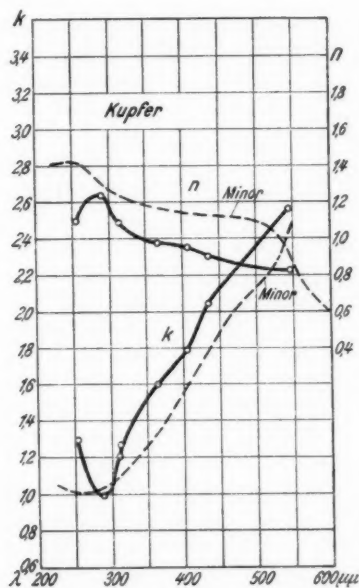


Fig. 8

3. *Zink*. Die Herstellung eines einwandfreien Zinkspiegels ist nicht leicht und erfordert viel Übung. Die Zeit, bis ein Zinkspiegel maschinell durchpoliert ist, beträgt ungefähr 4 bis 5 Tage. Der schließlich untersuchte Spiegel war vorzüglich. Die an ihm ermittelten Werte sind in Tab. 5 zusammengestellt.

Tabelle 5

$\lambda \mu\mu$	$\varphi$	$\bar{\varphi}$	$n$	$\kappa$	$n \kappa$	$R^0/\%$
578	78° 51'	36° 36'	1,47	3,19	4,68	79,0
546	78 24	37 35	1,25	3,63	4,51	80,4
436	75 00	39 30	0,714	4,78	3,41	80,4
406	73 50	40 06	0,588	5,30	3,12	80,8
366	72 04	40 24	0,498	5,53	2,75	79,7
335	70 15	40 30	0,446	5,42	2,42	74,3
313	69 03	40 18	0,431	5,16	2,22	75,4
281	67 06	41 12	0,318	6,16	1,96	77,2
266	65 45	41 30	0,276	6,50	1,79	71,3
254	60 09	40 31	0,287	4,26	1,22	63,5

Der Verlauf des Brechungsindex und des Absorptionskoeffizienten im Vergleich mit Meier ist in der Fig. 9 gezeichnet.

Besonders bei  $\kappa$  ist der Unterschied gegen Meier ziemlich groß. Da Meier seinen Spiegel als „einigermaßen brauchbar“ bezeichnet, dürften meine Werte zuverlässiger sein.

4. Gold. Der Goldspiegel war auf galvanischem Wege hergestellt. Der Spiegel konnte wegen der dünnen Schicht natürlich nicht tagelang auf der Maschine poliert werden. Er wurde, nachdem er vergoldet worden war, auf einem weichen Rehleder bis zum Entstehen eines Hochglanzes leicht abgerieben. Die Werte für  $n$  und  $\kappa$  sind in der Tab. 6 eingetragen.

Die älteren Werte (Vergleich wieder bei Meier) zeigen wieder dieselben Schwankungen von  $\pm 10$  Proz. Auch hier beträgt der von Rathenau gemessene Extinktionskoeffizient nur etwa die

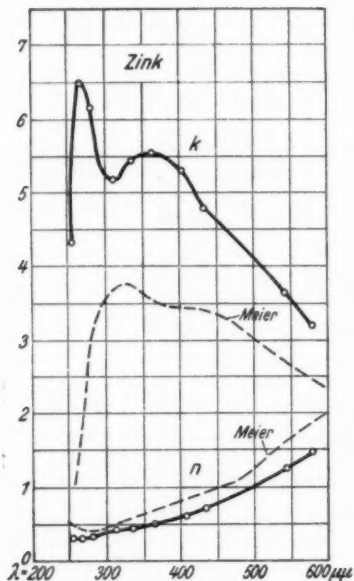


Fig. 9

Schwankungen von  $\pm 10$  Proz. Auch hier beträgt der von Rathenau gemessene Extinktionskoeffizient nur etwa die

Tabelle 6

$\lambda$	$\varphi$	$\psi$	$n$	$k$	$n \cdot k$	$R^0/0$
578	73° 11'	41° 02'	0,46	6,52	2,99	83,5
546	75 33	40 44	0,59	6,09	3,60	84,7
436	66 15	32 04	1,01	1,68	1,69	41,5
406	65 44	28 55	1,20	1,29	1,54	33,5
366	64 30	23 27	1,45	0,85	1,24	23,0
313	68 30	22 17	1,82	0,84	1,53	29,4
281	67 45	24 20	1,62	0,96	1,56	30,3
254	66 11	25 05	1,47	0,98	1,44	28,3

Hälfte. Der Vergleich mit den von Meier gemessenen Werten ist aus der Fig. 10 zu ersehen.

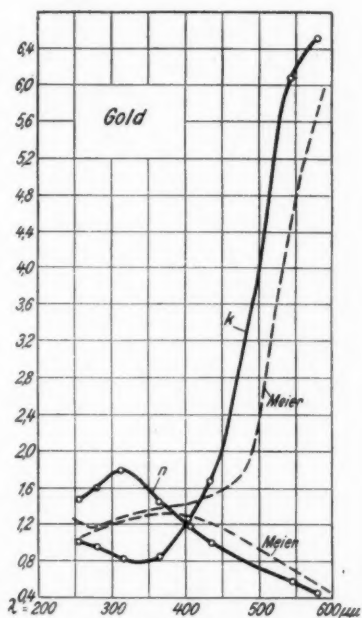


Fig. 10

5. Stahl. Die am Kruppschen Edelstahl V 2a gemessenen Werte für  $\bar{\varphi}$  zeigen im ganzen Bereich des gemessenen Spektrums eine konstante Abweichung um etwa  $+2^\circ$  im Vergleich zu den Messungen von Minor und Meier an gewöhnlichem

Stahl. Sie sind wohl in erster Linie durch die chemische Verschiedenheit der untersuchten Oberfläche begründet. Der Gang der Kurven für  $n$  und  $\kappa$  ist jedoch einigermaßen derselbe wie bei Minor. Er ist in der Fig. 11 gezeichnet. Die beobachteten Werte sind in der Tab. 7 zusammengestellt.

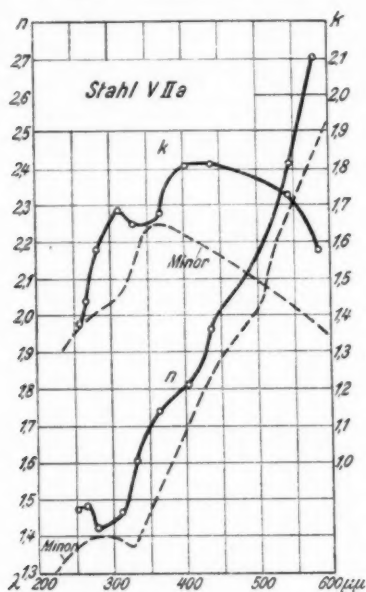


Fig. 11.

Tabelle 7

$\lambda$	$\Phi$	$\Psi$	$n$	$\kappa$	$n \kappa$	$R\%$
578	79° 06'	29° 17'	2,70	1,58	4,27	66,1
546	78 35	30 24	2,42	1,72	4,16	66,6
436	76 36	31 07	1,96	1,79	3,51	63,0
406	75 34	31 12	1,81	1,79	3,23	60,6
366	74 27	30 48	1,74	1,69	2,85	57,0
335	73 18	30 36	1,61	1,66	2,67	53,8
313	72 12	31 00	1,47	1,69	2,48	52,1
281	70 57	30 18	1,43	1,57	2,24	47,7
267	70 09	29 29	1,49	1,43	2,13	44,4
254	69 54	28 55	1,47	1,38	2,03	42,5

Das Reflexionsvermögen ergab sich bei den vorliegenden Spiegeln erheblich höher als bei den von älteren Autoren untersuchten Spiegeln, die nicht aus Edelmetall bestanden.

6. *Silicium*. Außer einer Messung von v. Wartenberg<sup>1)</sup>, die sich auf die D-Linie  $\lambda = 589 \mu\mu$  bezieht, liegt über Silizium bisher nichts vor. Es stand mir ein verhältnismäßig guter Siliciumspiegel der Firma Zeiss zur Verfügung. Die Oberfläche des Siliciumspiegels ist jedoch nicht gleichmäßig, da das Metall stets Hohlräume besitzt, die beim Polieren die Oberfläche stören. Die beobachteten Werte zeigt die Tab. 8.

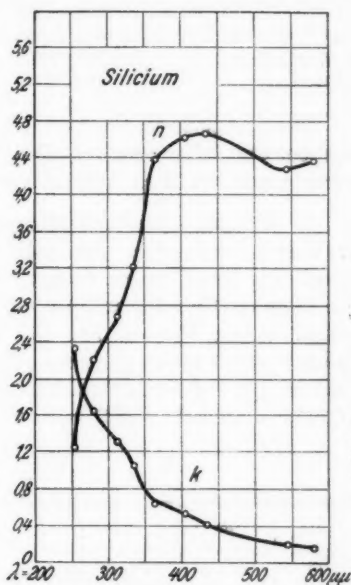


Fig. 12

Tabelle 8

$\lambda$	$\varphi$	$\bar{\varphi}$	$n$	$\kappa$	$n \kappa$	$R^0/\%$
578	77° 24'	5° 27'	4,39	0,18	0,81	40,9
546	77 42	6 19	4,28	0,21	0,91	40,3
436	78 54	11 39	4,68	0,43	1,94	48,1
406	79 18	14 35	4,62	0,54	2,49	68,2
366	79 17	19 18	4,38	0,65	2,86	52,8
335	78 15	24 09	3,21	1,07	3,45	56,6
281	77 12	30 01	2,20	1,64	3,62	62,3
254	73 48	34 29	1,24	2,38	2,95	63,8

Den Vergleich mit dem Werte von v. Wartenberg ermöglicht die Tab. 9.

1) von Wartenberg, Verh. Deutsch. Physik. Ges. 1910, S. 105.  
Annalen der Physik. IV. Folge. 81.

Tabelle 9

	$\varphi$	$\psi$	$n$	$\kappa$	$n \kappa$	$R^0/\%$
v. Wartenberg . . . .	75° 39'	7° 03'	3,87	0,12	0,47	35,7
Pfestorf . . . . .	77 24	5 27	4,39	0,18	0,81	40,9

Die Abweichungen von v. Wartenberg sind beträchtlich, was bei der Inhomogenität aller Siliciumoberflächen kaum zu verwundern ist. Den Verlauf von  $n$  und  $\kappa$  zeigt die Fig. 12.

7. *Mangan*. Auch von Mangan liegt nur eine Messung von v. Wartenberg vor. Ich habe mir deshalb einen Manganspiegel aus einem Stück Mangan, das aus der Vakuumschmelze von Heraeus-Hanau stammte, von der Firma Zeiss herstellen lassen. Dieses Material ließ sich mit dem sonst vorzüglichen Poliermittel X nicht polieren. Der Spiegel ist deshalb durch Polieren mit äußerst feinem Schmiergel hergestellt worden. Die Ergebnisse sind in der Tab. 10 zusammengestellt.

Tabelle 10

$\lambda$	$\varphi$	$\psi$	$n$	$\kappa$	$n \kappa$	$R^0/\%$
578	76° 14'	31° 46'	1,88	1,85	3,47	55,3
546	75 26	30 51	1,83	1,73	3,17	59,5
436	72 48	32 22	1,38	1,92	2,66	56,5
406	71 46	32 24	1,30	1,90	2,47	54,3
366	70 28	33 24	1,12	2,00	2,24	52,8
313	69 22	33 31	1,05	2,03	2,14	52,1
281	67 53	33 49	0,90	2,04	1,83	48,3
254	65 35	34 12	0,83	2,02	1,67	46,0

Den graphischen Verlauf von  $n$  und  $\kappa$  zeigt Fig. 13. Den Vergleich mit den Werten von v. Wartenberg gibt Tab. 11.

Tabelle 11

	$\varphi$	$\psi$	$n$	$\kappa$	$n \kappa$	$R^0/\%$
v. Wartenberg . . . .	78° 18'	29° 16'	2,49	1,56	3,89	63,5
Pfestorf . . . . .	76 14	31 46	1,88	1,85	3,47	55,3

v. Wartenberg gibt an, daß sein aluminothermisch hergestellter Spiegel an der Luft nach kurzer Zeit braun anlief.

Diese Beobachtung konnte ich an dem bisher benutzten Spiegel nicht bestätigen. Wahrscheinlich liegt darin der Grund der Abweichungen der Meßergebnisse. Ferner ist auch beim Mangan

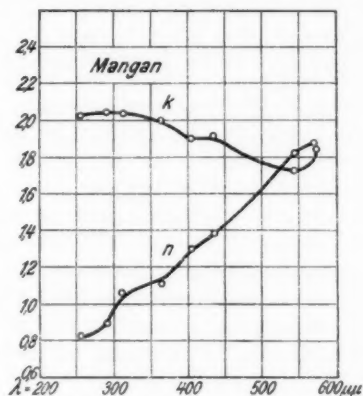


Fig. 18

die Oberfläche nicht gleichmäßig, sondern zeigt ähnlich wie das Silicium kleine Aussprünge.

### Zusammenfassung

1. Es wurde eine zur Messung der Metallkonstanten bisher nicht benutzte photographisch-photometrische Methode entwickelt, welche es gestattet, lediglich durch Feststellung der Gleichheit zweier Schwärzungen Haupteinfallswinkel und Hauptazimut zu ermitteln.

2. Mit dieser Methode wurden die optischen Konstanten der Metalle Kupfer, Gold, Zink, Silicium, Mangan, Nickel und V 2a-Stahl im Wellenlängenbereich von 600 bis 250  $\mu\text{m}$  bestimmt.

3. Es ergab sich, daß die erheblichen Differenzen, welche die von verschiedenen Beobachtern gefundenen Werte der Metallkonstanten aufweisen, sich erklären durch a) verschiedene Güte der Politur, b) verschiedene chemische Beschaffenheit der Oberfläche. Der letzte Einfluß wurde an einem Nickelspiegel durch Behandlung mit Wasser und bei einem Kupferspiegel durch Abreiben mit Alkohol gesondert untersucht. Es ergab

sich, daß eine adsorbierte Wasserschicht die optischen Konstanten eines Metalles im Vergleich zu den Abweichungen, die unvollkommene Politur hervorruft, relativ wenig ändert. Da die Politur die bestmögliche war, dürfen die hier mitgeteilten Zahlen den wahren Werten der optischen Konstanten erheblich näher kommen als alle älteren Messungen.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung von Hrn. Prof. Försterling im Physikalischen Institut der Universität Jena von 1923 bis 1926 ausgeführt. Ich möchte am Schlusse nicht versäumen, Hrn. Prof. Försterling für diese Anregung herzlich zu danken. Ebenso herzlich danke ich an dieser Stelle auch Hrn. Geh. Hofrat Prof. Dr. M. Wien und Hrn. Prof. Joos für das dauernde fördernde Interesse, das sie dem Fortgange dieser Arbeit entgegengebracht haben. Der Firma Zeiss bin ich für die gewissenhafte Herstellung einwandfreier Spiegel und sonstige freundliche Unterstützung zu großem Dank verpflichtet.

Jena, Physikalisches Institut der Universität, 4. Juni 1926.

(Eingegangen 2. August 1926)

---



### 3. Ein einfaches Verfahren zur Messung der Absorption in großem Spektralbereich nebst Anwendung auf Gläser<sup>1)</sup>; von Karl Schachtschabel

(Hierzu Tafel IX)

#### § 1. Die verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Absorption

Die Methoden zur Bestimmung der Absorption von Gläsern und anderen durchsichtigen Materialien im ultravioletten Licht stützen sich auf drei Wirkungen: 1. auf die fluoreszenz-erregende<sup>2)</sup>, 2. auf die photoelektrische<sup>3)</sup> und 3. auf die photochemische Wirkung<sup>4)</sup> des kurzwelligen Lichtes. Die erste Methode wurde zuerst nur zur qualitativen Bestimmung der Absorption benutzt und später von Krüss zu einer Meßmethode ausgebaut. Da die Bestimmung der Absorption für die Praxis von Wichtigkeit ist, sind immer wieder neue Verfahren nach den drei verschiedenen Methoden angegeben worden, die jedoch mehr oder weniger einen großen schwer zu handhabenden Apparat beanspruchen, so daß sie für die Praxis weniger geeignet sind. Auf Anregung von Hrn. Prof. Försterling wurde deshalb die vorliegende Arbeit unternommen, die als Ziel die einfache und exakte Messung der Absorption möglichst im ganzen Bereich des Spektrums hatte. Auf Vorschlag von Hrn. Prof. Försterling sollte diese Methode, wenn irgend möglich, eine Registriermethode werden, die mit ein oder zwei Registrierungen im Bereich des sichtbaren und ultravioletten Spektrums die Absorption direkt zu ermitteln gestattete.

1) Jenaer Dissertation. 1926.

2) Krüss, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1903, S. 197 u. 220.

3) Kreusler, Ann. d. Phys. 6. S. 398. 1901; H. v. Halban und K. Siedentopf, Zeitschr. f. phys. Chemie 100, S. 208. 1922; C. Müller, Zeitschr. f. Phys. 34. S. 824. 1925.

4) H. Th. Simon, Habilitationsschrift. Erlangen 1896. Glatzel, Phys. Zeitschr. 1. S. 285. 1900; 2. S. 173. 1901; F. P. Defregger, Dissertation, Göttingen 1913.

Aus diesem Grunde wurden zuerst Versuche mit lichtelektrischen Zellen angestellt, um die lichtelektrische Methode für die Spektralphotometrie im Sichtbaren und Ultraviolett zu verwenden. Da bei Beginn der Arbeit nur eine Photozelle mittlerer Empfindlichkeit aus gewöhnlichem Glas zur Verfügung stand, wurde diese Methode zunächst im Sichtbaren geprüft und die Versuchsanordnung mit einer Registriereinrichtung in Verbindung gebracht. Angewendet wurde die von Elster und Geitel<sup>1)</sup> angegebene Elektrometerschaltung mit Ableitungswiderstand (Xylol-Alkohol). Bei dieser Schaltung kommt es auf gute Konstanz der auf den Monochromator auffallenden Intensität an. Als Lichtquelle wurde deshalb ein Nernstbrenner verwendet. Der spektralen Zerlegung des Lichtes diente ein von der Firma C. Zeiss zur Verfügung gestellter Monochromator, der mit Quarz-Flußspat-Optik versehen war. Die Versuche schienen zunächst aussichtsreich, und man konnte hoffen, daß sich diese Methode auch im Ultraviolett mit Quarzzellen anwenden ließe. Für diese Untersuchungen kam aber nur eine konstant brennende Bogenlampe als Lichtquelle in Betracht, da die Energie anderer Lichtquellen im Ultraviolett sich als zu gering erwiesen hatten. Um von Intensitätsschwankungen, die auch bei guten automatisch regulierenden Bogenlampen auftreten, unabhängig zu werden, wurde die einfache Schaltung durch die Kompensationsschaltung<sup>2)</sup> ersetzt.

Große Schwierigkeiten bereitete die Beschaffung geeigneter lichtelektrischer Zellen. Versuche, lichtelektrische Zellen aus Quarz mit eingeschmolzenen Elektroden herzustellen, scheiterten. Ich mußte mich deshalb mit Zellen mit aufgekitteten Quarzkappen begnügen, die leider nur eine geringe Haltbarkeit besitzen. Die Zellen wurden im Physikalischen Staatsinstitut zu Hamburg von Hrn. Dr. Müller mit großer Sorgfalt hergestellt. Mit fünf derartigen Zellen, die teilweise mehrmals gefüllt waren, weil ihre Empfindlichkeiten während des Transportes zurückgegangen waren, wurde die Kompensationsschaltung geprüft. Als Lichtquelle wurde, wie schon erwähnt, eine automatisch regulierende Bogenlampe benutzt. Die Kompensationsschaltung erwies sich jedoch wegen der großen Trägheit, mit der die Einstellung des Elektrometer-

1) J. Elster u. H. Geitel, *Phys. Zeitschr.* **21**, S. 361. 1920.

2) P. P. Koch, *Ann. d. Phys.* **39**, S. 705. 1912.

fadens erfolgte, als unbrauchbar. Auch wurden die Intensitätsschwankungen infolge der verschiedenen Empfindlichkeit der zur Verfügung stehenden Zellen nicht völlig ausgeglichen. Aus diesen Gründen kehrte ich zur Einzellenschaltung mit Ableitungswiderstand zurück. Die Bogenlampe mußte bei dieser Schaltung durch eine konstante Lichtquelle mit kontinuierlichem Spektrum im Ultravioletten ersetzt werden. Hierfür kam nur eine Wolframband- oder Wolframbogenlampe mit Quarzfenster<sup>1)</sup> in Frage.

Zu diesem Zwecke wurde ein Quarzfenster von 20 mm Durchmesser an ein kurzes Quarzrohr und mittels Zwischengläser an ein Rohr aus Thüringer Glas angeschmolzen. Dieses Rohr wurde dann bei der Osram-Gesellschaft an eine Wolframlampe angesetzt. Leider reichte aber die Energie der Wolframbogenlampe im Ultravioletten nicht aus, um mit den zur Verfügung stehenden Zellen Gläser mit genügender Genauigkeit quantitativ bis an die Grenze ihrer Durchlässigkeit untersuchen zu können. Das Versagen der lichtelektrischen Registriermethode für diese Untersuchung ist also einerseits auf die zu geringe Empfindlichkeit, die sich bei derartigen Zellen mit aufgekitteter Quarzkappe erreichen läßt, und andererseits auf die für diesen Zweck zu geringe Energie der Wolframbogenlampe im Ultravioletten zurückzuführen.

Da es aus diesen Gründen aussichtslos schien, mit dieser Methode zu einem brauchbaren Resultat zu kommen, wurde auf die lichtelektrische Registriermethode verzichtet und auf Vorschlag von Hrn. Prof. Joos eine photographische Methode mit Hilfe von Intensitätsmarken nach dem von G. Hansen<sup>2)</sup> angegebenen Verfahren ausgearbeitet.

## 2. Beschreibung der Versuchsanordnung zur Bestimmung der Absorption mit der Hansenschen Stufenblendenanordnung

Die Hansensche Stufenblendenanordnung ist ein Verfahren zur Herstellung von Intensitätsmarken. Sie hat gegenüber anderen Anordnungen den Vorzug, daß man eine beliebige Anzahl von Intensitätsmarken mit willkürlich wählbaren und genau zu bestimmenden Intensitätsverhältnissen mit einer einzigen Belichtung herstellen kann. Hierbei sind die Intensitäts-

1) G. Gehlhoff, Zeitschr. für techn. Phys. H. 10. S. 225. 1920.

2) G. Hansen, Zeitschr. f. Physik 29. S. 356. 1924.

verhältnisse von der Farbe des Lichtes völlig unabhängig, was z. B. bei der Verwendung von Filtern, wie sie von Dorgelo<sup>1)</sup> benutzt wurden, nicht der Fall ist. Die Intensitätsmarken werden bei dieser Methode durch die Abbildung rechteckiger Ausschnitte einer Blende, die nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit abgestuft sind, durch ein astigmatisches System erzeugt. Um die Intensitätsmarken für alle Spektralbereiche gleichzeitig zu erhalten, wurde die Stufenblendenanordnung mit einem Spektrographen in Verbindung gebracht (Fig. 1).

Die mit dem Lichte einer Hg-Bogenlampe gleichmäßig beleuchtete Stufenblende *S* wird durch die Abbildungslinse *A*, einen Quarzflußspatachromaten, auf den Spalt *L* des Spektrographen abgebildet. Die Quarzzyylinderlinse *Z* ist zwischen der Stufenblende *S* und der Abbildungslinse *A* so angeordnet, daß

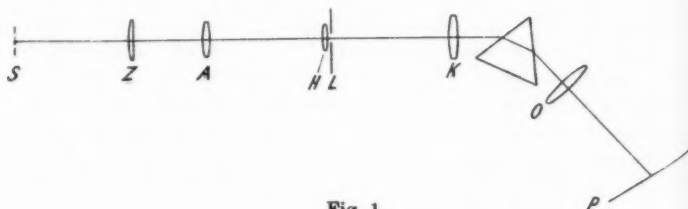


Fig. 1

*S* und *A* in bezug auf *Z* konjugiert sind, und so orientiert, daß sich die Achse der Zylinderlinse (d. i. der Hauptschnitt, in dem die Wirkung Null vorliegt) dem Spalt parallel befindet. Es entstehen dann in der Spaltebene des Spektrographen übereinander liegende Streifen, die den Blendenausschnitten parallel verlaufen. Längs jedes dieser Streifen ist die Helligkeit in einem bestimmten Bereich, in welchem keine Abschattung durch die Linsenfassung eintritt, proportional dem entsprechenden Blendenausschnitt; denn die Öffnungswinkel der in der Spaltebene zur Wirkung gelangenden Lichtbündel sind diesen Ausschnitten proportional.

Eine gute Abbildung der Streifen ist nur dann möglich, wenn sich die Begrenzung der Stufenblende, die sich aus Vertikalen und Horizontalen zusammensetzt, den Hauptschnitten

1) H. B. Dorgelo, Zeitschr. f. Physik **31**, S. 827. 1925 u. Phys. Zeitschr. **26**, S. 756. 1925.

genau parallel befindet. Zur besseren Justierung sind daher Stufenblende und Zylinderlinse in drehbaren Fassungen angebracht.

Als Spektralapparat diente ein von der Firma Carl Zeiss zur Verfügung gestellter Spektrograph mit Cornuprisma und Quarzflußspatachromaten mit ungefähr 400 mm Brennweite. Der Spektrograph wurde zur genaueren Einhaltung der Belichtungszeiten mit einem photographischen Verschuß versehen.

Um eine größere Lichtstärke zu erzielen, wurde auf Vorschlag von Hrn. Dr. Hansen die Hilfslinse *H* angebracht; sie hat lediglich die Aufgabe, die Blende des Achromaten *A* in das Kameraobjektiv *O* abzubilden.

Zu den einzelnen Teilen ist zu bemerken:

*Lichtquelle.* Die Bogenlampe, die anfangs verwendet wurde, mußte, da die damit angestellten Untersuchungen nicht reproduzierbar waren, durch eine andere Lichtquelle ersetzt werden. Selbst bei langen Belichtungszeiten, die durch entsprechende Abblendung der optischen Apparatur ermöglicht wurden, trat kein Ausgleich der Intensitätsschwankungen ein. Auch mit der Wolframbogenlampe wurde keine gute, gleichmäßige Beleuchtung erreicht. Es konnte deshalb nur die Quecksilber-Quarzlampe für diese Untersuchung Verwendung finden. Nachteilig ist dabei, daß man die Durchlässigkeiten nur für die Hg-Linien bestimmen kann, was aber für die zu untersuchenden Gläser im Ultraviolett genügte. Andererseits hat man aber infolge des Linienspektrums den Vorteil, daß man den Spalt des Spektrographen breiter wählen und die Linien bequemer photometrieren kann, wobei dann auch die durch das Prisma hervorgerufene Krümmung der Linien nicht mehr stört. Die Quecksilberlampe zeigte, nachdem sie ein bis zwei Stunden gebrannt hatte, keinerlei Schwankungen. Um von Störungen der Hausbatterie, die durch gleichzeitige starke Inanspruchnahme hervorgerufen werden konnten, frei zu sein, wurden die Aufnahmen nachts vorgenommen.

*Stufenblende.* Die Stufenblende mußte für diese Untersuchungen auf Quarz hergestellt werden. Die günstigste Abstufung der Ausschnitte der sogenannten Stufenblende ist durch das Schwärzungsgesetz gegeben. Die Schwärzung einer photographischen Schicht in Abhängigkeit von der auffallenden

Intensität des Lichtes und von der Art der Entwicklung ist eingehend untersucht worden.<sup>1)</sup> Trägt man in ein Diagramm die Schwärzung als Funktion des Logarithmus der Intensität des einfallenden Lichtes ein, so erhält man eine Kurve, die erst im Gebiet der sogenannten Unterbelichtung langsam, dann stärker und fast linear im Gebiet der normalen Belichtung ansteigt. Im Gebiet der Überbelichtung erreicht die Kurve ein Maximum, so daß dann eine Erhöhung der Intensität keine größere Schwärzung gibt, und fällt im Gebiet der Solari-sation ab.

Für den geraden Teil der Schwärzungskurve, der von der Art der Platte und Entwicklung abhängig ist, kann man normalerweise die Intensitäten im Verhältnis 1:10 variieren. Würde man die Blendenausschnitte im Verhältnis 1:10 variieren, so könnte man nur Durchlässigkeiten bis herunter zu 0,1 ermitteln. Will man aber auch geringere Durchlässigkeiten messen, wie sie bei der vorliegenden Arbeit nötig waren, so muß man auch die Teile der Schwärzungskurve, die der Unter- und Überbelichtung entsprechen, mit in Betracht ziehen.

Bei der für diese Untersuchung gewählten Stufenblende variieren daher die Blendenausschnitte im Verhältnis 1:50. Die Breiten der Blendenausschnitte wurden nach der Gesetzmäßigkeit:  $2^{1-0,8 \cdot (S-8)}$  für  $S = 1, 2, \dots, 8$  berechnet. Für die einzelnen Stufen ergeben sich die folgenden Breiten: 97,01; 55,71; 32,00; 18,38; 10,56; 6,06; 3,48; 2,00, die bei der Herstellung 10mal verkleinert wurden. Die Blende wurde bei der Firma C. Zeiss in eine Silberschicht auf Quarz graviert. Der äußere Teil der Blende wurde, um ihn vollkommen undurchsichtig zu machen und vor mechanischen Einflüssen zu schützen, verkupfert und schwarz lackiert. Die Form der Stufenblende ist in nahezu natürlicher Größe in Fig. 2, Taf. IX abgebildet. Die Breiten der Blendenausschnitte, die sich wie die Intensitäten verhalten, sind in Fig. 6 (vgl. S. 943) 5mal vergrößert eingetragen. Die Figur stellt also die Intensitäten in Abhängigkeit von den 8 Stufen dar.

*Beleuchtung der Stufenblende.* Äußerst wichtig ist bei dieser Methode, daß die Stufenblende gleichmäßig beleuchtet wird.

1) J.M.Eder, Handbuch der Photographie. Monographien über „The Theory of Photography“ des Laboratoriums der Eastman Kodak Company.

Hansen verwandte zur Erzielung dieser Gleichmäßigkeit eine Mattscheibe in Verbindung mit einer Milchglasscheibe. Diese Anordnung war aber für die vorliegende Untersuchung, die sich besonders auf das ultraviolette Spektralgebiet erstrecken soll, nicht brauchbar.

Ich versuchte deshalb, die gleichmäßige Beleuchtung der Stufenblende mit einer matten Quarzscheibe zu erreichen. Die Photometrierung der damit gemachten Aufnahme ergab jedoch Ungleichmäßigkeiten, die auf Beleuchtungsfehler zurückzuführen waren. Um die Beleuchtung gleichmäßiger zu gestalten, wurde sie mit einer in Fig. 3 im Querschnitt gezeichneten Kugel vorgenommen. Die Beleuchtung mit einer derartigen Photometerkugel erwies sich aber zu schwach. Bei dem zur Verfügung stehenden Öffnungsverhältnis der Apparatur hätten im Ultravioletten Belichtungszeiten bis zu 45 Min. angewandt werden müssen. Trotzdem sei diese Kugel hier beschrieben, da sie bei der Prüfung der photographischen Platten Verwendung fand (vgl. unten).

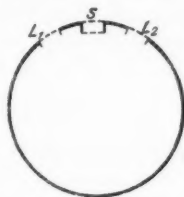


Fig. 3

Die Kugel war aus Aluminiumblech gestanzt. Die innere Fläche war chemisch derart behandelt, daß an ihr diffuse Reflexion eintrat. Vor der mittleren Öffnung zwischen den Bogenlampen  $L_1$  und  $L_2$  befand sich die Stufenblende  $S$ , die durch einen in die Kugel hineinragenden Metallstutzen vor direktem Licht von  $L_1$  und  $L_2$  geschützt war. Später wurde die Kugel zwecks gleichmäßigerer diffuser Reflexion im Innern noch mit einem Magnesianiederschlag versehen.

Mit einer beidseitig matten Quarzscheibe, mit der die Energie der Lichtquelle viel besser ausgenutzt wurde, erreichte ich schließlich auch die erforderliche Gleichmäßigkeit der Beleuchtung folgendermaßen: die der Lichtquelle zugekehrte Seite der Quarzscheibe war mit gröberem und die der Stufenblende zugewandte Seite mit feinerem Schmirgel geschliffen. Die Beleuchtung der Mattscheibe erfolgte mit parallelem Licht. Zur Vermeidung der Abbildung des Kornes der matten Fläche auf der photographischen Platte wurde die Stufenblende etwa 8 mm vor der matten Fläche angeordnet.

*Begrenzung des Strahlenganges.* Von Hansen sind die Öffnungshalbmesser der Zylinderlinse und Abbildungslinse angegeben, die mindestens eingehalten werden müssen, damit innerhalb eines bestimmten Gebietes des Streifensystems keine Abschattung eintritt.

Bringt man die Stufenblendenanordnung mit einem Spektrographen in Verbindung, so sind weitere wichtige Bedingungen zu beachten, damit sich die auf die photographische Platte gelangenden Intensitäten wie die Blendenausschnitte verhalten. Diese Bedingungen ergeben sich aus geometrisch optischen Betrachtungen. Alle Strahlen, die durch den Spalt des Spektro-

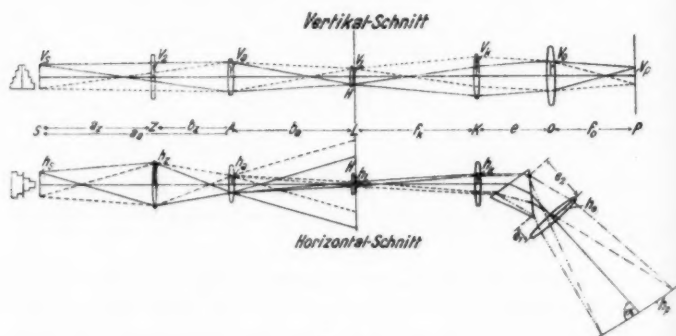


Fig. 4

graphen in diesen eintreten, müssen durch Kollimator, Prisma und photographisches Objektiv ungehindert auf die photographische Platte gelangen und zur Abbildung beitragen. Keiner dieser Strahlen darf also abgeblendet werden, da sonst die Intensitätsverhältnisse gestört werden. In Fig. 4 ist für die beiden sog. Hauptschnitte des Systems, die in diesem Falle vertikal und horizontal liegen, der Strahlenverlauf dargestellt; und zwar sind wegen der besseren Übersicht außer der optischen Achse nur die Randstrahlen gezeichnet und im Vertikalschnitt das Prisma weggelassen.

Aus dieser Figur lassen sich die folgenden Formeln, die schon von v. Hippel veröffentlicht sind, für die Öffnungshalbmesser der beiden Hauptschnitte ableiten, welche genau



zu berücksichtigen sind, damit alle in den Spektrographen eintretenden Strahlen vignettierungsfrei zur Abbildung beitragen. Die Öffnungshalbmesser des Vertikalschnittes sind mit  $v$  und die des Horizontalschnittes mit  $h$  bezeichnet und mit Indices versehen, die sich auf die einzelnen Öffnungen beziehen. Ferner sind noch die Beziehungen angegeben, aus denen sich die Brennweiten der Zylinderlinse  $Z$  und Hilfslinse  $H$  für die maximale Lichtausnutzung ermitteln lassen.

## Horizontalschnitt

$$h_k \geq h_0 + h_l \cdot \frac{e}{f_k} - e_2 \cdot \frac{h_p \cdot \sin \alpha}{f_0 + h_p \cdot \cos \alpha}$$

$$h_a \leq \frac{b_a}{f_k} \cdot \left( h_k - e \cdot \frac{h_l}{f_k} \right)$$

$$h_z \geq h_a + \frac{b_z}{b_a} \left[ h_l + \left( 1 - \frac{b_a}{f_a} \right) \cdot h_a \right]$$

## Vertikalschnitt

$$v_k \geq v_0 + e \cdot \frac{v_l}{f_k}; \quad v_0 = \sqrt{\left( \frac{d}{2} \right)^2 - h_0^2}$$

$$v_a \leq \frac{b_a \cdot v_0}{f_k}$$

$$v_z \geq \frac{b_z \cdot v_l + v_a \cdot a_z}{a_z + b_z}$$

$$f_z = \frac{a_a \cdot h_a \cdot h_z}{(h_a + h_z)^2}$$

$$f_h = \frac{b_a \cdot f_k^2}{f_k^2 + b_a (f_k - e)}$$

Um eine gute Abbildung der Intensitätsmarken auf der photographischen Platte zu gewährleisten, wurde zuerst als Hilfslinse  $H$  ein Quarzflußspatachromat benutzt, der aber durch eine einfache Quarzlinse ersetzt werden mußte, da er Interferenzen zeigte, die zum Teil auf der Platte abgebildet wurden. Dabei zeigte sich übrigens, daß die Abbildung, nachdem der Achromat durch eine einfache Quarzlinse ersetzt war, infolge der geringen ausgenutzten Öffnung nicht merklich verschlechtert wurde.

Bei der Abbildung der Stufenblende  $S$  durch den Achromaten  $A$  ist darauf zu achten, daß der Abbildungsmaßstab günstig gewählt wird. Die Höhe der einzelnen Streifen darf nicht zu klein sein, damit sich die Intensitätsmarken gut photometrieren lassen. Da man in den meisten Fällen nicht über alle Öffnungen und Brennweiten der Linsen frei verfügen kann, geht man am besten rückwärts von der größten Öffnung aus, die — wie aus dem Strahlengang der Fig. 4 hervorgeht — das Kameraobjektiv  $O$  im Horizontalschnitt besitzen muß, und blendet alle anderen Linsen entsprechend ab.  $h_0$  und  $v_0$  sind durch die Beziehung  $v_0 = \sqrt{\left( \frac{d}{2} \right)^2 - h_0^2}$  miteinander verknüpft,

in der mit  $d$  der Durchmesser der wirksamen Öffnung des photographischen Objektives  $O$  bezeichnet ist. Um sicher zu sein, daß wirklich keine Vignettierung eintritt, wird man  $v_a$  und  $h_a$  etwas kleiner wählen und alle übrigen Öffnungen dagegen nicht so stark abblenden.

*Einschaltung des zu untersuchenden Materials.* Das zu untersuchende Material wurde — soweit es sich um Gläser handelte — in Form von parallelen Platten hinter den Kollimator in den parallelen Strahlengang gebracht. Die Güte der Planparallelität darf dabei nicht zu weit (auf Bruchteile von Lichtwellenlängen) getrieben werden, da sonst die Platte als Perot-Fabry wirkt und die Linien von Interferenzkurven durchgezogen sind.

Zur schnelleren Auswechslung der Glasstücke wurde am Kollimator eine Vorrichtung zur Aufnahme der Halter für die verschieden dicken Glasproben angebracht. Auf diese Weise war auch stets die senkrechte Lage der Gläser zum Strahlengang gewährleistet.

*Blende vor der photographischen Platte.* Unmittelbar vor der photographischen Platte war eine Blende angebracht, deren lichte Höhe etwas größer war als die Höhe der Spektrallinien, um die darüber und darunter liegenden Teile der Platte vor etwa vorhandenem diffusen Licht zu schützen.

*Platten.* Für die Aufnahmen wurden teils Hauff-, teils Agfa-Platten verwandt, über deren Eigenschaften weiter unten berichtet wird.

*Belichtung.* Zur Vermeidung von zu kurzen Belichtungszeiten und der dadurch bedingten Fehler wurde das Öffnungsverhältnis der Apparatur entsprechend verringert. Die kürzeste verwendete Belichtungszeit betrug 30 Sek. Versuche ergaben, daß sich selbst Belichtungszeiten von 20 Sek. mittels Stoppuhr und Verschuß genau genug einhalten ließen, da selbst ein absichtlicher Fehler von 1 Sek. nur eine Schwärzungsänderung ergab, die innerhalb der natürlichen Schwärzungsschwankung (vgl. unten) lag.

*Behandlung der Platten.* Da sich zweifellos bei längeren Entwicklungszeiten Unterschiede leichter ausgleichen, die durch verschieden rasches Eindringen des Entwicklers in die Schicht auftreten können, wurde die Entwicklungszeit absichtlich lang (6—10 Min.) gewählt. Ein vorheriges Weichen der Gelatine-

schicht zur gleichmäßigeren Einwirkung des Entwicklers zeitigte keine besseren Resultate. Als notwendig erwies sich aber, die Platten in destilliertem Wasser zu spülen, Entwickler und Fixierbad mit destilliertem Wasser anzusetzen. Nach dem Spülen der Platten in Leitungswasser bildete sich beim Trocknen ein Kalkschleier der bei der Photometrierung sehr leicht zu Fehlern Anlaß geben kann.

*Photometrierung.* Zur Photometrierung der Aufnahmen stand mir das lichtelektrische Registrierphotometer des Physikalischen Institutes zur Verfügung, das sich für diesen Zweck als sehr vorteilhaft erwies. Die Kurven der Registrierdiagramme zeigen entsprechend der Abstufung treppenförmigen Verlauf. Die Ausmessung dieser Diagramme erfolgte mit einem Glasmaßstab, der mit Hilfe einer Lupe noch gut 0,1 mm abzulesen gestattete. Zur bequemen Ausmessung war über der Zylinderlinse des Registrierphotometers ein Draht angebracht, der in jedem Photogramm einen horizontal verlaufenden Strich erzeugt, von dem aus die Elektrometerausschläge der einzelnen Stufen gemessen wurden. Für Intensitätsmarken gleicher Schwärzungen sind die Elektrometerausschläge einander gleich. Es mußte natürlich darauf Bedacht genommen werden, daß die Empfindlichkeit des Photometers für die Registrierung der beiden zu vergleichenden Aufnahmen (mit dünner und dicker Absorptionsschicht) genau gleich blieb, was dadurch von selbst kontrolliert wurde, daß die beiden Aufnahmen in einem Zug hintereinander durchs Photometer liefen und die Bewegungsrichtung kommutiert wurde. Die beim Rückwärtslaufen auf dasselbe Registrierpapier gezeichnete Kurve mußte sich dann mit der beim Vorwärtslaufen erzeugten decken.

*Ermittlung der Durchlässigkeitsfaktoren.* Statt durch die Absorptionskoeffizienten werden die Gläser herkömmlicherweise durch ihre Durchlässigkeitsfaktoren  $D$  charakterisiert, welche durch den Bruchteil des einfallenden Lichtes, der von 1 mm Substanz hindurch gelassen wird, definiert sind, wenn kein Reflexionsverlust eintreten würde.

Trifft auf eine absorbierende Schicht eine Intensität  $I_0$  senkrecht auf, so wird jedoch an der ersten Fläche ein bestimmter Bruchteil  $r$  reflektiert, ein Teil  $I = I_0 \cdot (1 - r)$  dringt in das Medium ein. Die Intensität  $I$  stellt also die wirklich in das Medium eindringende Strahlung dar. Auf dem Wege zur

zweiten Grenzfläche wird diese Intensität auf  $I_1 = I \cdot D^d$  geschwächt, wenn die Schichtdicke der Substanz  $d$  Millimeter beträgt. An der zweiten Grenzfläche geht ein weiterer Teil durch Reflexion verloren, so daß aus dem Medium die Intensität  $J_2 = J_1 \cdot (1 - r) = J_0 \cdot D^d \cdot (1 - r)^2$  austritt, wenn man die gegen  $J_2$  äußerst geringen Intensitäten der austretenden Strahlen vernachlässigt, die von sekundären Reflexionen im Innern der Schicht herrühren.

Um den Reflexionsverlust zu eliminieren, vergleicht man nicht die Intensität, welche beim Einschalten des Glases hindurchgeht, mit derjenigen, welche ohne Glas hindurchgelassen wird, sondern mit derjenigen, welche ein Stück Glas anderer Dicke hindurchläßt. Es wurden daher mit der Stufenblendenanordnung zwei Aufnahmen mit verschiedenen Schichtdicken des zu untersuchenden Glases gemacht. Die verschiedenen Stufen auf der Platte entsprechen verschiedenen Intensitäten  $J_0$  des auffallenden Lichtes. Durch Ermittlung der Stufen, welche in beiden Aufnahmen gleich geschwärzt sind, läßt sich der Durchlässigkeitsfaktor  $D$  folgendermaßen berechnen. Es ist nämlich:

$$D^{d_1} = \frac{J_{01}}{J_{01} (1 - r)^2} ; \quad D^{d_2} = \frac{J_{02}}{J_{02} (1 - r)^2} ,$$

wenn man die auffallenden Intensitäten mit  $J_{01}$  und  $J_{02}$  und die hindurchgelassenen mit  $J_{21}$  und  $J_{22}$  bezeichnet. Für die Durchlässigkeit der Schicht ( $d_1 - d_2$ ) folgt daraus:

$$D(d_1 - d_2) = \frac{J_{21} \cdot J_{02}}{J_{01} \cdot J_{22}} .$$

In den zu vergleichenden Aufnahmen sind für die Stufen gleicher Schwärzung die von den Schichten  $d_1$  und  $d_2$  durchgelassenen Intensitäten  $J_{21}$  und  $J_{22}$  gleich, so daß die Durchlässigkeit dann gegeben ist durch:

$$D(d_1 - d_2) = \frac{J_{02}}{J_{01}} .$$

Die Durchlässigkeit einer Schicht ( $d_1 - d_2$ ) ist somit durch die Intensitäten  $J_{02}$  und  $J_{01}$  gegeben, die beim Durchgang durch die Schichten  $d_2$  und  $d_1$  auf gleiche Intensität geschwächt werden.

Bei den einzelnen Aufnahmen wurden 16, 6, 2 und 1 mm dicke Glasproben in den Strahlengang gebracht. Um auch die

energieschwächeren Hg-Linien noch gut auswerten zu können, wurde die Belichtungszeit variiert; bei zwei zu vergleichenden Aufnahmen wurde jedoch die Belichtungszeit streng gleich gewählt. Zur Kompensation der Reflexion wurde bei geringen Durchlässigkeiten, als ein 2-mm-Plättchen praktisch nichts mehr durchließ, ein Quarzplättchen verwendet und das 1-mm Glasplättchen mit dem Quarzplättchen verglichen. Die Aufnahmen wurden stets nach folgendem Schema auf einer Platte vorgenommen:

1. Aufnahme mit 16-mm-Glasplättchen,
2.     "     "     1-mm-     "     ,
3.     "     "     6-mm-     "     ,
4.     "     "     2-mm-     "     ,
5.     "     "     1-mm-     "     ,
6.     "     "     Quarzplättchen.

Zur Bestimmung der Durchlässigkeit eines Glases für die Hg-Linien genügte es im allgemeinen, diese Aufnahmen mit 30 und 120 Sek. Belichtungszeit auszuführen. Man hat dann stets die Möglichkeit, aus den verschiedenen Aufnahmen die Linien herauszugreifen, die in bezug auf die Schwärzung der einzelnen Stufen zum Photometrieren am geeignetsten sind.

*Auswertung der Aufnahmen.* Zur Ermittlung der Intensitätswerte  $J_{01}$  und  $J_{02}$ , die beim Durchgang durch die beiden Schichten  $d_1$  und  $d_2$  auf gleiche Intensität geschwächt werden und mithin auf der photographischen Platte gleiche Schwärzung hervorrufen, trägt man die von einer beliebigen Nullmarke gemessenen Elektrometerausschläge  $e$  (da es nur auf relative Messungen ankommt!), welche zu den durch die Anwendung der Stufenblende erzeugten Feldern einer Spektrallinie gehören, in Abhängigkeit von ihren durch die Blendenausschnitte gegebenen Intensitäten auf und zwar für je eine Aufnahme mit dünner und dicker Absorptionsschicht. Auf diese Weise erhält man zwei Kurven, welche die von den Schichten  $d_1$  und  $d_2$  durchgelassenen Intensitäten charakterisieren. Für gleiche Werte von  $e$  ergeben sich aus diesen Kurven die Intensitäten, die beim Durchgang durch die Schichten  $d_1$  und  $d_2$  auf gleiche Intensität geschwächt werden. Der Quotient aus den so ermittelten Intensitätswerten ergibt die Durchlässigkeit der Schicht ( $d_1 - d_2$ ). Zur Erzielung einer größeren Genauigkeit

des Durchlässigkeitsfaktors für 1 mm Schicht wurde — wenn irgend möglich — die Durchlässigkeit für eine dickere Schicht ermittelt und dann auf  $D^1$  reduziert.

Für die Auswertung war es praktisch, die Ausschläge  $e$  des Registrierdiagramms direkt als Funktion der Stufen 1—8 aufzutragen. In diesem Falle ermittelt man zunächst die Stufenwerte, für die gleiche Schwärzung vorliegt, und entnimmt die diesen Werten entsprechenden Intensitäten dem Intensitätsdiagramm der Fig. 6.

Ein Beispiel soll dies erläutern. Fig. 5a, Taf. IX, stellt zwei Aufnahmen, die mit einer Belichtungszeit von zwei Minuten aufgenommen sind, dar zur Ermittlung der Durchlässigkeit des

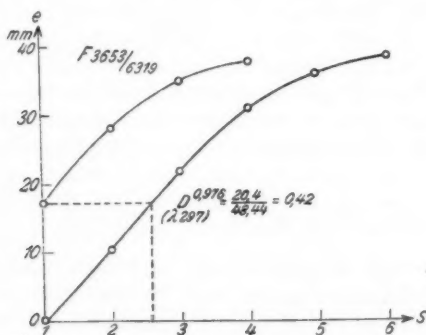


Fig. 5c

Blauviolglases. Aus diesen Aufnahmen sind die Durchlässigkeitsfaktoren für die Hg-Linien 303 und 297 ermittelt worden. Die erste Aufnahme ist mit einer Schichtdicke von 1 mm und die zweite mit 2-mm-Schicht aufgenommen. In Fig. 5b, Taf. IX, ist für die Linie 297 die Registrierkurve wiedergegeben, und zwar bezieht sich die linke Kurve auf Aufnahme 2 und die rechte auf 1. In 5c sind die Elektrometerschläge  $e$  in vergrößertem Maßstab als Funktion der Stufenzahl aufgetragen.

Für jeden Stufenwert der linken Kurve läßt sich in der rechten ein Stufenwert ermitteln, für den die gleiche Schwärzung vorliegt. Die Ermittlung dieser Werte nimmt man nach Möglichkeit im geradlinig verlaufenden Teil der Kurven vor, weil man dort die größte Genauigkeit erzielt.

Aus Fig. 5c geht hervor, daß z. B. die erste Stufe der einen Aufnahme und die Stufe 2,57 der anderen gleiche Schwärzung haben. Im Intensitätsdiagramm (Fig. 6) findet man die zu diesen Stufenwerten gehörigen Intensitäten 48,44 und 20,4.

Da die genauen Dicken der bei den Aufnahmen verwendeten Blauviolplättchen  $d_1 = 1,978$  und  $d_2 = 1,002$  mm waren, so ergibt sich die Durchlässigkeit für  $d_1 - d_2 = 0,976$  mm zu:

$$D^{0,976} = \frac{20,4}{48,44} = 0,42$$

Für eine 1 mm dicke Schicht errechnet sich daraus eine Durchlässigkeit von  $D^1 = 0,41$ .

Es lassen sich selbstverständlich bei der Auswertung auch andere Stufenwerte gleicher Schwärzungen in Betracht ziehen. Man wird aber nur den Wert ermitteln, der sich mit der größten Genauigkeit angeben läßt. Daraus ersieht man, daß nur das interessierende Stück der einen Kurve — in diesem Falle nur das Stück der unteren Kurve zwischen der zweiten und dritten Stufe — ausgezogen zu werden braucht. Dies bedeutet bei der Auswertung eine große Zeitersparnis.

### § 3. Fehlerquellen und erreichbare Genauigkeit

Bei den photometrisch zu vergleichenden Aufnahmen kommt es auf möglichste Konstanz der Bedingungen an, unter denen die beiden Aufnahmen vorgenommen werden. Im folgenden wird daher auseinandergesetzt, wie dies in den einzelnen Fällen erreicht wurde, und gezeigt, wo Fehler auftreten und wie sie möglichst vermieden werden.

**Plattenfehler.** Da die Genauigkeit dieser wie jeder anderen photographisch spektrophotometrischen Methode hauptsächlich

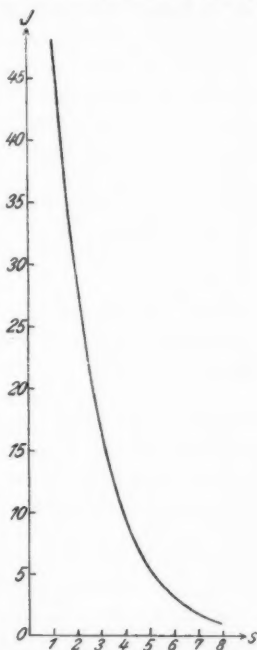


Fig. 6

durch Plattenfehler bedingt ist, wurde auf ihre experimentelle Ermittlung besondere Sorgfalt verwendet. Zuerst glaubte ich, daß die vorhandenen Fehler durch ungleiche Belichtungszeiten oder Intensitätsschwankungen der Lichtquelle veranlaßt seien. Um einwandfrei nachzuweisen, daß die vorhandenen Fehler wirklich in der photographischen Schicht zu suchen sind, wurden Aufnahmen mit der oben erwähnten Photometerkugel gemacht, die für diesen Zweck etwas abgeändert wurde. Die Bogenlampen wurden durch Glühlämpchen ersetzt und vor diesen zur Erzielung einer noch gleichmäßigeren Beleuchtung Milchglasscheiben angebracht. Die runde Öffnung zwischen den beiden Lichtquellen, auf die die photographische Platte zur Belichtung gebracht wurde, hatte einen Durchmesser von 25 mm. Die damit hergestellten Schwärzungen der Platte konnten innerhalb dieses Gebietes in bezug auf ihre Gleichmäßigkeit untersucht werden. Ungleichmäßigkeiten der Schwärzung, die dabei auftraten, waren nur auf Fehler der lichtempfindlichen Schicht, nicht auf Fehler der Beleuchtung zurückzuführen. Ein Teil der Fehler wird, wie bereits P. P. Koch<sup>1)</sup> erwähnt, durch die nicht gleichmäßige Verteilung der Silberkörner in der Gelatineschicht hervorgerufen. Ein anderer Teil der Ungleichmäßigkeit der Schicht (Schwankung der Schichtdicke) aber ist auf das verwendete Glasmaterial, auf das die photographische Schicht gegossen ist, speziell auf die Oberflächenbeschaffenheit desselben zurückzuführen.

Die Untersuchung einer Reihe von Platten ergab, daß im allgemeinen feinkörnigere Platten — infolge ihrer zweifellos besseren Kornverteilung in der Gelatine — gleichmäßiger arbeiten. Für die gewählte Form der Stufenblende, deren Intensitäten im Verhältnis 1 : 50 variieren, konnten jedoch feinkörnige Platten wegen der Steilheit ihrer Schwärzungskurve nicht verwendet werden.

In bezug auf die Gradation waren die Extrarapidplatten die geeignetsten. Um von Fehlern, die dadurch hervorgerufen werden, daß z. B. eine Vertiefung der Glasplatte eine Verstärkung der Schicht hervorruft, unabhängig zu werden, wurden die photographischen Schichten auf Spiegelglas gegossen. Derartige Platten wurden für diese Untersuchungen von den Firmen Agfa und Hauff hergestellt.

1) P. P. Koch, Ann. d. Phys. 60. S. 845. 1909.



Auch bei diesen ergaben sich bei Prüfung mit der Photometerkugel noch immer Schwankungen der Schwärzung innerhalb des gleichmäßig belichteten Feldes, welche einer Schwankung der Intensität um 1,5 Proz. entsprachen. Der Durchlässigkeitsfaktor wird jedoch, da er aus einer größtmöglichen Schichtdicke bestimmt wird, durch derartige Schwankungen sehr viel weniger beeinflusst (vgl. unten).

Gegenüber dem Plattenfehler sind die anderen möglichen Fehler als klein anzusehen. In Frage kommen:

*Fehler durch Schwankungen der Lichtquelle.* Absichtliche Änderung der Stromstärke der Lichtquelle um 2—3 Proz. ergab bei der Auswertung der Aufnahmen Abweichungen, die sich vollkommen innerhalb der Fehlergrenze bewegten, die durch die Plattenfehler gegeben war.

*Fehler der Stufenblende.* Die Stufenblende wurde mit dem Komparator ausgemessen. Dabei zeigte sich, daß die Blende sehr gut graviert war und die Blendenausschnitte von den berechneten um höchstens 1 Proz. abwichen.

*Fehler durch mangelhafte Abbildung der Zylinderlinse.* Damit die Intensitätsverhältnisse der Stufen auf der Platte den Breiten der Blendenausschnitte entsprechen, muß die Zylinderlinse sehr gut abbilden. Die benutzte Linse war mit großer Sorgfalt hergestellt, so daß dadurch kein merklicher Fehler hervorgerufen wurde. Am besten verwendet man eine auf Körper hergestellte Zylinderlinse, da von Hand geschliffene wegen der schwierigen Herstellung der Zylinderfläche leicht Fehler zeigen, die unter Umständen die Intensitätsverhältnisse der Stufen stören können.

*Mechanische Fehler.* Die einzelnen Teile der Stufenblendenanordnung und der Spektrograph waren mittels Reiter auf optischen Bänken angeordnet, die auf Eisenschienen mit U-förmigem Querschnitt befestigt waren, so daß eine versehentliche Dejustierung, durch die ein Fehler verursacht werden kann, unmöglich war.

*Fehler bei der Photometrierung.* Die wiederholte Photometrierung ein und derselben Aufnahmen an ganz verschiedenen Tagen ergab bei der Ermittlung der Durchlässigkeiten keine merklichen Abweichungen. Das konnte als Kriterium dafür gelten, daß das Photometer mit genügender Genauigkeit arbeitete.

*Erreichte Genauigkeit der Methode.* Um den Gesamtfehler und seinen Einfluß auf das Resultat bei der Bestimmung der Durchlässigkeit festzustellen, wurden mehrere Spiegelglasplatten mit je 6 Aufnahmen untersucht. Diese Aufnahmen wurden für verschiedene Wellenlängen photometriert. Die Ausmessung der Registrierdiagramme ergab für einen Stufenabstand von 8 mm Abweichungen bis zu  $\pm 0,2$  mm. Vorher angestellte Versuche mit gewöhnlichen Platten zeigten durchschnittlich den doppelten Fehler.

Bei der Auswertung kann also jeder gemessene Stufenabstand mit einem Fehler von  $\pm 0,2$  mm behaftet sein. Infolgedessen können auch die aus dem Intensitätsdiagramm ermittelten Intensitäten  $J$  um einen entsprechenden Betrag  $dJ$  falsch sein.

Aus  $D^{d_1-d_2} = \frac{J_{02}}{J_{01}}$  ergibt sich für den Fehler:

$$\frac{d D^{d_1-d_2}}{D^{d_1-d_2}} = \frac{d J_{02}}{J_{02}} + \frac{d J_{01}}{J_{01}}$$

Bei Reduktion auf die Schicht von 1 mm Dicke folgt:

$$\frac{d D}{D} = \frac{1}{d_1 - d_2} \cdot \left( \frac{d J_{02}}{J_{02}} + \frac{d J_{01}}{J_{01}} \right)$$

Berechnet man aus  $D^{d_1-d_2}$  den Durchlässigkeitsfaktor für die Dickeneinheit, so wird, wenn  $(d_1 - d_2) > 1$  ist, der Fehler verringert, wenn  $(d_1 - d_2) < 1$  ist, vergrößert. Es wurden deshalb bei den Messungen die Durchlässigkeitsfaktoren stets mittels der größten zur Verfügung stehenden und noch anwendbaren Glasdicke bestimmt. Die zu untersuchenden Gläser waren in vier verschiedenen Dicken von 16, 6, 2 und 1 mm hergestellt; benutzt wurden die Kombinationen  $(d_1 - d_2)$ : 16—1, (6—1), (2—1) mm. Bei geringen Durchlässigkeiten wurde, wie schon oben erwähnt, das 1-mm-Glasplättchen mit einem Quarzplättchen verglichen. Die Ermittlung der Durchlässigkeitsfaktoren  $D^1$  aus  $D^{15}$  und  $D^5$  ergab vollkommene Übereinstimmung innerhalb der Fehlergrenzen.

Der prozentuale Fehler der ermittelten Durchlässigkeit  $\frac{d D^{(d_1-d_2)}}{D^{(d_1-d_2)}} \cdot 100$  ergibt sich unter Zugrundelegung der Abweichungen von  $\pm 0,2$  mm im Registrierdiagramm bei einem Stufenabstand von 8 mm zu 3 Proz. Drückt man die Durch-

lässigkeit in Prozenten aus, wie es in der Praxis meistens geschieht, so kann man die nach dieser Methode ermittelten Durchlässigkeitsfaktoren im ungünstigsten Falle bei einer Durchlässigkeit von 100 Proz. auf 3 Proz. und im günstigsten Falle, wenn die erste und achte Intensitätsmarke gleiche Schwärzung haben, auf 0,06 Proz. genau angeben.

Für jedes Glas sind die Durchlässigkeitsfaktoren  $D^1$  und  $D^{10}$  berechnet. Ihre Fehler  $dD^1$  und  $dD^{10}$  sind verschieden, je nach der Schichtdicke, aus der sie ermittelt wurden. Bei der Zusammenstellung der Resultate ist stets die erste Ungenauigkeitsstelle noch angegeben.

Zur Kontrolle der Stufenblendenmethode wurde die Krüsssche Fluoreszenzmethode herangezogen. Es wurden zu diesem Zwecke die Durchlässigkeitsfaktoren des Blauvioletglases bei der Firma C. Zeiss nach dem Krüssschen Verfahren gemessen. Die Ergebnisse beider Methoden zeigen innerhalb der Fehlergrenzen im sichtbaren Gebiet und nahen Ultravioletten sehr gute Übereinstimmung; im weiteren Ultravioletten zeigt sich die Überlegenheit der hier beschriebenen Methode durch die unveränderliche Genauigkeit bei der Bestimmung der Durchlässigkeitsfaktoren im ganzen Spektralbereich. Die beschriebene Methode hat ferner noch den Vorzug, daß mit ein und derselben Versuchsanordnung bei Anwendung entsprechend sensibilisierter Platten auch im langwelligen Spektralgebiet Durchlässigkeitsuntersuchungen ausgeführt werden können. Außer zur Absorptionsmessung eignet sich diese Methode auch zur quantitativen Messung der Intensität weit auseinanderliegender Spektrallinien. Man muß dann nur mit Hilfe einer Strahlungsquelle bekannter Intensitätsverteilung (z. B. Wolframglühlampe, Kohlebogen) bestimmen, welches Intensitätsverhältnis in zwei entfernten Spektralgebieten gleiche Schwärzung der photographischen Schicht hervorruft.

#### § 4. Resultate

Die untersuchten Gläser stammen aus dem Glaswerk von Schott & Gen. in Jena. Die folgende Tabelle enthält die dem Katalog entnommenen Charakteristiken: die Glasart, den Typus (alte Bezeichnung), die Abkürzungen (neue Bezeichnungen), die Schmelznummer, den Brechungsexponenten  $n_d$  für die gelbe

Heliumlinie, die reziproke relative Dispersion  $v_d = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}$   
und die mittlere Dispersion  $n_F - n_C$ .

Glasart	Typus	Abkürzung	Schmelz-Nummer	$n_d$	$v_d$	$n_F - n_C$
Bor-Kron . . . . .	0.144	BK 1	16125	1,51061	63,3	0,00806
Bor-Kron . . . . .	0.3832	BK 7	14053	1,51647	64,0	0,008065
Kron . . . . .	0.6223	K 7	18509	1,51236	60,4	0,00848
Zink-Kron . . . . .	0.15	ZK 7	16600	1,53311	58,0	0,00919
Barit-Kron . . . . .	0.227	BaK 2	20401	1,54132	59,5	0,00910
Schwer-Kron . . . . .	0.1209	SK 1	8369	1,61002	56,8	0,01074
Barit-Leicht-Flint . . . . .	0.846	BaLF 5	16728	1,55062	52,8	0,01042
Barit-Leicht-Flint . . . . .	0.5125	BaLF 6	18666	1,59001	52,9	0,01116
Schwerst-Kron . . . . .	0.4679	SSK 1	20739	1,61728	54,0	0,01144
Doppel-Leicht-Flint . . . . .	0.378	LLF 1	17425	1,54753	45,9	0,01192
Doppel-Leicht-Flint . . . . .	0.726	LLF 2	8756	1,53994	47,4	0,01140
Leicht-Flint . . . . .	0.276	LF 3	17115	1,58102	42,3	0,01373
Leicht-Flint . . . . .	0.340 b	LF 5	18239	1,58033	41,1	0,01412
Flint . . . . .	0.103	F 2	21100	1,62044	36,3	0,01711
Flint . . . . .	0.167	F 4	14775	1,61733	36,5	0,01690
Robon . . . . .	T. 188			1,52608		
Blauviol . . . . .	F. 3653		6319	1,5064		

Die zu untersuchenden Schichten von 16, 6, 2 und 1 mm Dicke waren in der optischen Schleiferei der Firma C. Zeiss hergestellt; sie waren an den Endflächen gut poliert und an den Seitenflächen matt geschliffen. Alle Glasproben waren fehlerfrei, so daß die Abbildung der Intensitätsmarken auf der photographischen Platte nicht beeinflußt wurde.

Ferner sind zwei auf Quarz zerstäubte, im Meßlaboratorium der Firma C. Zeiss von Hrn. Dr. Kessler hergestellte Platinschichten in bezug auf ihre Durchlässigkeit im Ultravioletten untersucht worden. Die Zerstäubungsdaten dieser Schichten waren wie folgt: Größe der verwendeten Kathode 100·120 qmm, Abstand der Anode 110 mm, Quarzplättchen in 40 mm Abstand von der Kathode, 1750 Volt Zerstäubungsspannung bei 25 Milliamp. Für die erste Schicht betrug die Zerstäubungszeit 2 Min. und für die zweite 6 Min.

Die nach der beschriebenen Methode ermittelten Durchlässigkeitsfaktoren für die Wellenlängen der Hg-Linien sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt. In den Tabellen sind die Durchlässigkeitsfaktoren für 1 und 10 mm Glasdicke und für die Pt-Schichten zusammengestellt. Die für die Pt-Schichten angegebenen Durchlässigkeiten stellen die gesamten Durchlässigkeiten (reine Durchlässigkeit plus Reflexionsverlust) dar.

## Durchlässigkeitsfaktoren für 1 mm Glasdicke

$\lambda$	O. 144	O. 3832	O. 6223	O. 15	O. 227	O. 1209	O. 846	O. 5125	O. 4679
( $\mu\mu$ )	BK 1	BK 7	K 7	ZK 1	BaK 2	SK 1	BaLF 5	BaLF 6	SSK 1
436	0,998	0,997	1,000	1,000	0,999	1,000	1,000	0,996	0,995
405	0,998	0,999	1,000	1,000	0,998	0,998	0,998	0,997	0,992
366	0,997	0,996	0,996	0,996	0,997	0,974	0,995	0,980	0,947
334	0,968	0,967	0,965	0,962	0,943	0,806	0,949	0,839	0,691
313	0,823	0,8382	0,8027	0,8394	0,7024	0,47	0,72	0,46	0,212
303	0,62	0,6705	0,59	0,6703	0,46	0,228	0,38	0,147	—
297	0,49	0,54	0,47	0,53	0,276	0,140	0,150	—	—
289	0,276	0,36	0,231	0,33	—	—	—	—	—
280	—	0,142	—	—	—	—	—	—	—

$\lambda$	O. 378	O. 726	O. 276	O. 340 b	O. 103	O. 167	T. 188	F. 3653
( $\mu\mu$ )	LLF 1	LLF 2	LF 3	LF 5	F 2	F 4		
436	0,997	1,000	0,995	0,999	0,997	0,996	0,931	0,6423
405	0,997	1,000	0,992	0,998	0,999	0,994	0,9078	0,8908
366	0,994	0,998	0,982	0,985	0,985	0,965	0,7532	0,969
334	0,956	0,972	0,872	0,883	0,840	0,785	0,7532	0,9142
313	0,7160	0,8038	0,43	0,47	0,235	0,204	0,213	0,7369
303	0,35	0,44	0,045	0,082	—	—	—	0,54
297	0,105	0,180	—	—	—	—	—	0,41
289	—	—	—	—	—	—	—	0,237
280	—	—	—	—	—	—	—	—

## Durchlässigkeitsfaktoren für 10 mm Glasdicke

$\lambda$	O. 144	O. 3832	O. 6223	O. 15	O. 277	O. 1209	O. 846	O. 5125	O. 4679
( $\mu\mu$ )	BK 1	BK 7	K 7	ZK 1	BaK 2	SK 1	BaLF 5	BaLF 6	SSK 1
436	0,98	0,97	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00	0,96	0,95
405	0,98	0,99	1,00	1,00	0,98	0,98	0,98	0,97	0,93
366	0,97	0,92	0,96	0,96	0,97	0,77	0,89	0,82	0,58
334	0,72	0,71	0,70	0,68	0,55	0,12	0,59	0,17	0,02
313	0,14	0,171	0,111	0,174	0,029	—	—	—	—
303	—	0,018	—	0,018	—	—	—	—	—

$\lambda$	O. 378	O. 726	O. 276	O. 340 b	O. 103	O. 167	T. 188	F. 3653
( $\mu\mu$ )	LLF 1	LLF 2	LF 3	LF 5	F 2	F 4		
436	0,97	1,000	0,96	0,99	0,97	0,96	0,49	0,012
405	0,97	1,00	0,92	0,98	0,99	0,94	0,380	0,314
366	0,95	0,98	0,83	0,86	0,86	0,70	0,059	0,73
334	0,64	0,75	0,26	0,29	0,17	0,09	—	0,408
313	0,035	0,113	—	—	—	—	—	0,047
303	—	—	—	—	—	—	—	—

Durchlässigkeitsfaktoren der Pt-Schichten

$\lambda$ ( $\mu\mu$ )	436	405	366	334	313	303	297
1	0,45	0,47	0,47	0,49	0,49	0,53	0,51
2	0,157	0,163	0,173	0,168	0,176	0,182	0,181

$\lambda$ ( $\mu\mu$ )	289	280	275	270	265	254	248
1	0,53	0,53	0,52	0,52	0,54	0,55	0,55
2	0,187	0,186	—	—	0,182	0,183	0,178

Die untersuchten Gläser zeigen alle den charakteristischen Verlauf der Absorption. Im Sichtbaren sind alle Gläser gut durchlässig bis auf die beiden letzten T. 188 und F. 3653, die ausgesprochene Farbgläser darstellen.

Aus den vorliegenden Zahlenwerten läßt sich zunächst erkennen, daß die Gruppe der Flintgläser, wie schon aus früheren Untersuchungen<sup>1)</sup> bekannt ist, im allgemeinen ultraviolette Licht stärker absorbiert als die Gruppe der Krongläser. Innerhalb jeder Gruppe selbst wieder findet man, daß, ausgehend von den gering brechenden Krongläsern bis zu Schwerst-Kron, die Durchlässigkeit im Ultravioletten geringer wird. Das gleiche gilt für die Flintgläser. Daher kommt es selbstverständlich vor, daß z. B. Schwer- und Schwerst-Kron eine geringere Durchlässigkeit besitzt als die leichten Flintgläser.

Was die Durchlässigkeiten der Platinschichten anbetrifft, so ist festzustellen, daß mit abnehmender Wellenlänge der Faktor  $D$  nur gering ansteigt, so daß praktisch die Platinschichten für das untersuchte Gebiet nahezu neutral sind, was für die Verwendung von Platinfiltern in der Ultraviolettphotometrie von Bedeutung ist.

#### Zusammenfassung

1. Die Hansensche Stufenblendenanordnung wurde mit einem Spektrographen in Verbindung gebracht. Die einwandfreie Arbeit mit dieser Anordnung fordert die Vignettierungsfreiheit der Apparatur, wofür rechnerisch die Bedingungen aufgestellt wurden.

2. Diese Stufenblendenanordnung, die sich auch zur quantitativen Intensitätsmessung von Spektrallinien eignet, wurde

1) Krüss, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1903, S. 197 u. 229.

zur quantitativen Ermittlung der Absorption im sichtbaren und ultravioletten Licht benutzt. Mit ihrer Hilfe läßt sich mit zwei Aufnahmen der Verlauf der Absorption im ganzen Spektrum messen.

3. Es wurden die Durchlässigkeitsfaktoren für 17 Gläser der Firma Schott & Gen. und für zwei Platinschichten gemessen.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung von Hrn. Prof. Dr. Försterling im Physikalischen Institut der Universität Jena ausgeführt. Es sei mir gestattet, an dieser Stelle Hrn. Prof. Dr. Försterling für die Anregung zu dieser Arbeit herzlich zu danken. Ebenso herzlich danke ich auch Hrn. Geh. Hofrat Prof. Dr. M. Wien und Hrn. Prof. Dr. Joos für das dauernde fördernde Interesse, das sie dem Fortgang dieser Arbeit entgegengebracht haben. Hrn. Dr. Hansen bin ich für mannigfache Ratschläge und der Firma C. Zeiss für die Bereitwilligkeit, mit der die für die vorliegenden Untersuchungen benötigten Apparate zur Verfügung gestellt wurden, zu Dank verpflichtet.

Jena, Physikalisches Institut der Universität, Aug. 1926.

(Eingegangen 2. August 1926)

---

#### 4. *Über entoptische Ringsysteme;* *von E. Waetzmann*

§ 1. Bei passender Wahl der Beleuchtung des eigenen Auges werden bekanntlich als Schattenbilder zahlreiche Körperchen sichtbar, die sich im Auge selbst befinden. Außerdem treten sekundäre Phänomene, nämlich Beugungserscheinungen auf. Diese entoptischen Bilder sind schon vielfach beschrieben worden, so daß es an dieser Stelle zu weit führen würde, auf die Literatur einzugehen. Bei der verwirrenden Fülle und Mannigfaltigkeit der Erscheinungen ist es nicht wunderbar, daß die Beschreibungen der einzelnen Beobachter oft nur schwer miteinander in Einklang zu bringen sind, zumal es sich ja um rein subjektive Beobachtungen handelt. Deshalb ist es vielleicht nicht überflüssig, wenn im folgenden eine Beugungserscheinung beschrieben wird, die ich an meinen Augen jederzeit mit großer Präzision und Leichtigkeit reproduzieren kann, und die von einigen anderen Beobachtern an ihren Augen kontrolliert wurde. Gewiß sind die entoptischen Erscheinungen in manchen Beziehungen (auch abgesehen von pathologisch bedingten Wahrnehmungen) von Auge zu Auge sehr verschieden; auf der anderen Seite ist aber zu betonen, daß zahlreiche, namentlich in physikalischer Beziehung, interessante Phänomene von jedem Beobachter wiedergefunden werden, vorausgesetzt, daß er sich die nötige Übung im Beobachten angeeignet hat.

§ 2. Beim „Blinzeln“ gegen die Sonne, bzw. etwas seitlich an der Sonne vorbei, sehe ich eine größere Zahl von Systemen konzentrischer Ringe, gruppiert um eine ziemlich genau kreisförmige Scheibe. Die meisten Systeme ähneln in ihrem Aussehen durchaus dem Ringsystem an einem Newtonschen Farbenglas. Bei einigen Systemen ist die mittlere Kreisscheibe dunkel, bei anderen befindet sich in ihrer Mitte ein heller Fleck. Erst nach längerer Übung gelang es, die einzelnen Systeme mühelos wiederzufinden und zu fixieren. Bei Bewegungen des Kopfes bewegen sie sich mit, bei Bewegungen des Augapfels



bleiben sie fast genau an ihrer Stelle im Raume. Da die Anordnung der Systeme von Auge zu Auge sehr verschieden ist, und da mein rechtes Auge sehr viel mehr und verwickelter angeordnete Systeme zeigt als das linke, ist in Fig. 1 eine schematische Darstellung der Lage der auffallendsten Ringsysteme in meinem linken Auge gegeben (gesehen vom Selbstbeobachter aus). Das System  $\alpha$  ist in Fig. 2 vergrößert dargestellt. Der mittlere helle Fleck und die folgenden 5 Ringe in  $\alpha$  sind auch unter ungünstigeren Versuchsbedingungen zu sehen, während die darauffolgenden Ringe (bis zu 6), die immer enger werden, nur bei günstiger Beleuchtung deutlich hervortreten. Im System  $\delta$  ist die mittlere Kreisscheibe dunkel und ein wenig kleiner als der

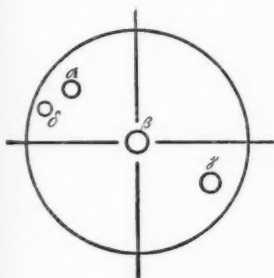


Fig. 1

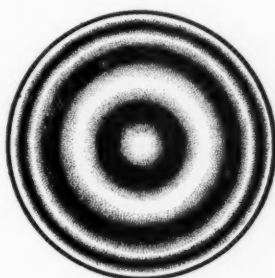


Fig. 2

helle Fleck und der erste dunkle Ring von  $\alpha$  zusammengekommen; dann folgt ein breiter heller Ring, dann noch einige dunkle und helle Ringe, aber weniger als in  $\alpha$ . System  $\beta$  zeigt einen großen hellen Fleck in der Mitte, ähnelt aber sonst mehr  $\delta$  als  $\alpha$ . In  $\gamma$  folgt auf einen dunklen Fleck ein auffallend breiter heller Ring, dann mehrere feinere helle und dunkle Ringe.

Zur Beobachtung fixiert man zunächst die Lichtquelle bei so weit geschlossenen Augenlidern, daß die Lichtquelle in ein (senkrecht) Lichtband mit einzelnen Längsstreifen auseinandergezogen wird, und wendet dann den Kopf um 5–10° zur Seite. Systeme in der Mitte und an den äußersten Rändern des Gesichtsfeldes sind besonders schwer zu beobachten. Bei den mittleren Systemen stört leicht die Lichtquelle; bei Randsystemen kommt es vor, daß sie bei schwächerer Beleuchtung gut zu sehen sind, bei intensiverer, mit der sich die Pupille ver-

engt, aber von dem Rande der Iris ganz oder teilweise verdeckt werden. Zuweilen werden sie dann noch im (am Rande der Iris) abgebeugten Lichte gesehen.

Unter den zahlreichen, scharf ausgeprägten Ringsystemen meines rechten Auges befindet sich eins, das gewisse charakteristische Abweichungen von den meisten anderen Systemen zeigt. Auf den hellen Mittelfleck und den ersten dunklen Ring folgt hier ein heller Ring von besonderer Breite, wie es in Fig. 3 schematisch dargestellt ist; dann folgen eine Anzahl schmalere Ringe. Nicht uninteressant ist es vielleicht, daß mehrere Wochen hindurch ein sich ständig änderndes System beobachtet wurde,

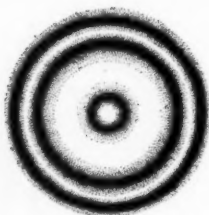


Fig. 3

das zunächst aus zwei sich berührenden Ringsystemen bestand, die mehr und mehr ineinander übergriffen, bis sie zu einem Ringsystem verschmolzen waren, dessen mittlerer dunkler Fleck allerdings gut merkliche Abweichungen von der Kreisform zeigt. Doch das nur nebenbei.

§ 3. An der Sonne ist die Erscheinung besonders schön zu beobachten, event. durch eine dunkle Brille hindurch. Man erhält hierbei in jedem System zahlreiche Ringe von großer Schärfe, und auch ihre Winkelgröße läßt sich bequem messen. Allerdings wirkt übermäßige Helligkeit der Lichtquelle leicht störend, namentlich solange man noch nicht genügend Übung im Beobachten besitzt; auf der anderen Seite darf die Helligkeit nicht zu gering sein. Eine Kerze in 1 m Entfernung einerseits, eine Kohlebogenlampe in einigen Metern Entfernung andererseits stellen die Extremwerte der benutzten künstlichen Lichtquellen dar. Ein Gasglühstrumpf in wenigen Metern Entfernung gibt besonders angenehme Beobachtungsverhältnisse, auch für die Messung der Winkelgröße. Der Sehwinkel für den zweiten dunklen Ring des Systems  $\alpha$  (äußerer Rand) wurde hierbei zu

1,5—1,6° bestimmt. Die übrigen Systeme sind von ähnlicher Größe.

§ 4. Die beschriebenen Ringsysteme dürfen nicht verwechselt werden mit anderen Ringsystemen, die im Auge entstehen können. Da sind zunächst die verschiedenartigsten, sehr schönen Systeme, die durch feine, auf der Oberfläche der Hornhaut befindliche Tröpfchen hervorgerufen werden. Sie sind schon an ihrer Beweglichkeit und Unbeständigkeit — jeder Lidschlag verändert die Konstellation — leicht zu erkennen. Ferner treten, zur Klasse der *mouches volantes* gehörend, sehr fein gestochene Ringsysteme verschiedener Größe auf, die den feingezeichneten Ringsystemen an einer dickeren Lummerplatte sehr ähneln. Übrigens habe ich bisher niemals ein derartiges System mit dunkler Mitte beobachtet, stets war die in der Mitte befindliche Kreisscheibe hell. Bei gleichzeitiger Beobachtung der eben genannten Ringsysteme und der oben besprochenen fällt sofort auf, daß die drei Systemarten in verschiedenen Ebenen liegen. Ferner beobachtete ich in einigen Fällen sowohl an der Sonne, als auch an künstlichen Lichtquellen Ringsysteme (mit bedeutend größerem Öffnungswinkel) um die Lichtquelle als Zentrum. Derartige Systeme, die den Beugungsringen an Nebelteilchen ähneln, sind schon in der Physiologischen Optik von Helmholtz erwähnt, und scheinen namentlich in pathologischen Fällen sehr deutlich zu werden. Endlich sind Beugungsringe an der Pupille bzw. am Rande der Iris zu erwähnen.

Die hier zur Diskussion stehenden Ringsysteme unterscheiden sich von den eben genannten teils durch ihre Größe, teils durch ihre Lage relativ zur Lichtquelle, teils dadurch, daß sie bei einer Bewegung des Augapfels ihre Lage im Raume beibehalten. Bei der bisher besprochenen Beobachtungsart gehört freilich eine gewisse Übung dazu, daß die Systeme bei Bewegung des Augapfels nicht überhaupt verschwinden. Ihre feste Lage besagt, daß sie von Körperchen (Kreisscheiben, Kugeln oder Ringen) herrühren, die in der Pupillenebene liegen.

§ 5. Die Untersuchung des Auges mit den üblichen entoptischen Methoden ergab nun ein Miniaturbild, in welchem fast sämtliche beobachteten Systeme in genau der gleichen Konstellation, wie sie vorher aufgezeichnet waren, wiedergefunden wurden, wenn auch längst nicht in der Schönheit und mit so vielen Ringen, wie beim Blinzeln gegen die Sonne oder eine andere

geeignete Lichtquelle. Beobachtet man mit Hilfe des Spiegelbildes einer Lichtquelle an einer fein polierten, kleinen Kugel, so stören übrigens bei heller Lichtquelle die prächtigen Farbenerscheinungen, die von der Oberfläche der Kugel herrühren, recht erheblich. In dem von dem Rande der Iris begrenzten entoptischen Bilde lagen sämtliche Systeme relativ zum Rande fest. System  $\delta$  konnte hierbei nicht mit Sicherheit gefunden werden. Besonders deutlich trat auch bei dieser Beobachtungsart System  $\alpha$  hervor, das übrigens schon vor zwei Jahren als das schönste und am schärfsten gezeichnete des linken Auges beim Blinzeln gegen die Sonne auffiel. Das Zustandekommen der Erscheinung beim „Blinzeln“ gegen eine Lichtquelle beruht, wie aus dem Vorgesagten ohne weiteres zu ersehen sein dürfte, darauf, daß hierbei das auffallende Lichtbündel durch die Wimpern usw. in eine Reihe feinsten Lichtbündel zerlegt wird, deren eines nun Schattenbilder mit Beugungsringen von den in der Pupillenebene liegenden Körperchen gibt.

§ 6. Es ist zunächst sehr auffallend, daß solche (auf der Oberfläche der Linse liegenden) Teilchen so gut kugel-, kreis- oder ringförmig sein sollen, daß sie als Beugungsbilder Ringsysteme von der beschriebenen Güte geben. An Beugungssystemen, die von irgendwelchen Struktureigenschaften oder eingelagerten Körperchen zwischen Pupillarebene und Retina herrühren, habe ich (abgesehen von der oben erwähnten, zu den *mouches volantes* gehörenden Gruppe) niemals ähnlich gut ausgebildete Ringsysteme beobachten können. Zum Teil mag das damit zusammenhängen, daß die Körperchen, die nicht in der Pupillenebene liegen, mehr oder weniger ausgeprägte Parallaxe zeigen. Ein Versuch, die die Systeme  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  verursachenden Körperchen auch objektiv, durch einen Außenbeobachter<sup>1)</sup> feststellen zu lassen, brachte keinen Erfolg, obwohl nach Erweiterung der Pupille durch Eserin das System  $\alpha$ , das bei normaler Pupille dicht am Rande derselben liegt, jetzt etwa in der Mitte des Pupillenradius, also an gut zugänglicher Stelle lag. Nebenbei bemerkt konnte an der Lage von  $\alpha$  relativ zum Pupillenrand die allmähliche Rückbildung der Pupillengröße auf ihren normalen Wert mit großer Genauigkeit verfolgt werden.

1) Der Direktor der hiesigen Augenklinik, Hr. Prof. Bielschowsky, hatte die Liebenswürdigkeit, diese Untersuchung vorzunehmen.

Die Hinzuziehung einiger Kontrollbeobachter (unter anderen der Herren J. Frieze und P. Hahn) ergab nun, daß diese in ihren Augen genau gleichartige Ringsysteme von fast gleicher Winkelgröße fanden. Es ist nicht überflüssig, zu bemerken, daß sämtliche Mitbeobachter zunächst gar nichts sahen, dann nur helle oder dunkle Flecken mit höchstens 1—2 Ringen, und erst nach längerer Beobachtungszeit fähig wurden, ganze Ringsysteme zu erkennen und sie messend zu verfolgen. Da es sich um eine subjektive optische Erscheinung handelt, ist die gleichzeitige Beobachtung durch mehrere Personen besonders wichtig. Deshalb schien es mir nicht überflüssig, hier eine kurze Beschreibung zu geben.

Breslau, Physikal. Institut d. Universität, Oktober 1926.

(Eingegangen 15. Oktober 1926)

## 5. Graphische Darstellungen zur Kinematik des Starkeffekts;

von Eberhard Buchwald

Im folgenden wird der atomare Bewegungsvorgang beim Starkeffekt des Wasserstoffs in einigen graphischen Darstellungen erläutert, die über die üblichen schematischen Figuren hinausgehend die Längen- und Lagenverhältnisse „richtig“ wiedergeben. Sie sollen gleichzeitig der Anschauung den Übergang zwischen der Epstein-Schwarzschildschen Behandlungsweise einerseits und der Bohrschen andererseits erleichtern.<sup>1)</sup>

1. Mit Epstein führen wir in einer Ebene, die den Kern und die durch ihn als Nullpunkt in Richtung des äußern Feldes gelegte  $z$ -Achse enthält (Meridianebene), parabolische Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  durch die Gleichungen

$$\frac{\varrho^2}{\xi} + 2z = \xi,$$

$$\frac{\varrho^2}{\eta} - 2z = \eta$$

ein, wo  $\varrho$  den Abstand von der  $z$ -Achse bedeutet, und beschreiben die Bewegung des Elektrons so: es läuft in der Meridianebene innerhalb eines Vierecks aus Parabelbögen um; die Meridianebene aber dreht sich gleichzeitig um die  $z$ -Achse (Drehwinkel  $\varphi$ ). Wir beschäftigen uns zuerst mit der Bewegung in der Meridianebene.

$\xi$  und  $\eta$  lassen sich als Funktionen der Winkelvariablen

$$w_1 = \frac{\partial S}{\partial I_1}, \quad w_2 = \frac{\partial S}{\partial I_2}$$

( $S$  die Wirkungsfunktion,  $I_1 = \oint \frac{\partial S}{\partial \xi} d\xi$  und  $I_2 = \oint \frac{\partial S}{\partial \eta} d\eta$ )

1) Die theoretischen Grundlagen siehe etwa in Sommerfelds *Atombau und Spektrallinien*, 4. Aufl., S. 356 ff., 377 ff., 818 ff., oder bei M. Born, *Vorlesungen über Atommechanik I*, Berlin 1925, S. 242 ff.

die zu  $\xi$  und  $\eta$  gehörigen Phasenintegrale) in eine doppelte Fourierreihe entwickeln<sup>1)</sup>, die für  $\xi$  geschrieben werden möge:

$$\xi = \sum_{\tau_1}^{-\infty \dots + \infty} \sum_{\tau_2}^{-\infty \dots + \infty} A_{\tau_1 \tau_2} e^{2\pi i (\tau_1 w_1 + \tau_2 w_2)}$$

mit

$$A_{\tau_1 \tau_2} = \int_0^1 \int_0^1 \xi e^{-2\pi i (\tau_1 w_1 + \tau_2 w_2)} dw_1 dw_2.$$

Zur Berechnung der  $A_{\tau_1 \tau_2}$  wenden wir das gleiche Verfahren an, das Kramers a. a. O. zur Fourierdarstellung der kartesischen Koordinaten benützt: führen wir statt  $\xi$  und  $\eta$  zwei neue Variable  $\psi$  und  $\chi$  durch

$$\xi = \kappa(2I_1 + I_3)I + 2\kappa I^2 \sigma_1 \cos \psi,$$

$$\eta = \kappa(2I_2 + I_3)I + 2\kappa I^2 \sigma_2 \cos \chi$$

ein, wo

$$\kappa = \frac{1}{4\pi^2 e^2 m} \text{ (e und m Ladung und Masse des Elektrons)}$$

$$I_3 = \oint \frac{\partial S}{\partial \varphi} d\varphi,$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{I} \sqrt{I_1(I_1 + I_3)},$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{I} \sqrt{I_2(I_2 + I_3)}$$

ist, so läßt sich zeigen, daß

$$2\pi w_1 = \sigma_1 \sin \psi + \sigma_2 \sin \chi + \psi + \pi,$$

$$2\pi w_2 = \sigma_1 \sin \psi + \sigma_2 \sin \chi + \chi + \pi$$

werden und daß die  $A_{\tau_1 \tau_2}$  schließlich die Form annehmen

$$A_{\tau_1 \tau_2} = \frac{2\kappa I^2 (-1)^{\tau_1}}{4\pi^2}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_1 \cos \psi (1 + \sigma_1 \cos \psi + \sigma_2 \cos \chi) e^{-i\tau_1 \psi - i\tau_2 \sigma_1 \sin \psi - i\tau_2 \chi - i\tau_2 \sigma_2 \sin \chi} d\psi d\chi$$

mit

$$\tau = \tau_1 + \tau_2.$$

1) H. A. Kramers, Diss. Kopenhagen 1919, Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, 8. Raekke III, 287, 1919. S. 304.

Die Integration ergibt im allgemeinen Falle

$$A_{\tau_1 \tau_2} = \frac{\kappa I^2 \sigma_1}{\tau} J_{\tau_2}(\tau \sigma_2) \{J_{\tau_1+1}(\tau \sigma_1) - J_{\tau_1-1}(\tau \sigma_1)\};$$

die  $J$  sind Besselsche Funktionen von den durch die Indices gekennzeichneten Ordnungen und den in den runden Klammern angegebenen Argumenten. Insbesondere wird für  $\tau = 0$  gefunden, je nachdem dieses durch  $\tau_1 = \tau_2 = 0$  oder durch  $\tau_1 = \pm 1$ ,  $\tau_2 = \mp 1$  oder durch  $\tau_1 = \pm m$ ,  $\tau_2 = \mp m$  ( $m \neq 0$  und  $\neq 1$ ) zustande kommt,

$$A_{00} = \kappa [(I + I_1)(I_1 + I_3) + I I_1],$$

$$A_{+1-1} = A_{-1+1} = \frac{\kappa I^2 \sigma_1 \sigma_2}{2},$$

$$A_{+m-m} = A_{-m+m} = 0.$$

Die Reihe für  $\xi$  hat demnach die Form

$$\begin{aligned} \xi = & \kappa [(I + I_1)(I_1 + I_3) + I I_1] + \frac{\kappa I^2 \sigma_1 \sigma_2}{2} (e^{2\pi i (w_1 - w_2)} + e^{-2\pi i (w_1 - w_2)}) \\ & - \kappa I^2 \sigma_1 \sum_{\tau_1}^{-\infty \dots + \infty} \sum_{\tau_2}^{-\infty \dots + \infty} \frac{1}{\tau} J_{\tau_2}(\tau \sigma_2) \{J_{\tau_1-1}(\tau \sigma_1) \\ & - J_{\tau_1+1}(\tau \sigma_1)\} e^{2\pi i (\tau_1 w_1 + \tau_2 w_2)}; \end{aligned}$$

in der Summe sind diejenigen Kombinationen  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  fortzulassen, die  $\tau = 0$  ergeben.

Wir gestalten diesen Ausdruck noch in dreierlei Weise um: erstens ersetzen wir die Winkelvariablen  $w_1$ ,  $w_2$  durch die Umlaufzahlen  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  gemäß

$$w_1 = \omega_1 t,$$

$$w_2 = \omega_2 t.$$

Zweitens berücksichtigen wir, daß in zulässiger Annäherung

$$\omega_1 = \omega + \omega_F,$$

$$\omega_2 = \omega - \omega_F$$

ist mit  $\omega$  als der Umlaufzahl des Elektrons in seiner Keplerellipse und  $\omega_F$  als einer zweiten gegen  $\omega$  kleinen Grundschwingungszahl, die durch das elektrische Feld hereinkommt und ihm proportional ist. Es wird hiernach

$$\begin{aligned} \tau_1 \omega_1 + \tau_2 \omega_2 &= (\tau_1 + \tau_2) \omega + (\tau_1 - \tau_2) \omega_F, \\ &= \tau \omega + \sigma \omega_F \end{aligned}$$

mit  $\tau + \sigma = 2\tau_2$  geradzahlig.



Drittens fassen wir jeweils das Glied  $+\tau$ ,  $\pm\sigma$  mit dem Gliede  $-\tau$ ,  $\mp\sigma$  zusammen, da beide denselben Koeffizienten haben.

Nach alledem nimmt  $\xi$  endgültig die Form an

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \xi &= \kappa [(I + I_1)(I_1 + I_3) + II_1] + \kappa I^2 \sigma_1 \sigma_2 \cos 2\pi \cdot 2\omega_F t \\ &\quad - 2\kappa I^2 \sigma_1 \sum_{\tau=1 \dots \infty} \sum_{\sigma=-\infty \dots +\infty} \frac{1}{\tau} J_{\frac{\tau-\sigma}{2}}(\tau \sigma_2) \{ J_{\frac{\tau+\sigma-2}{2}}(\tau \sigma_1) \\ &\quad - J_{\frac{\tau+\sigma+2}{2}}(\tau \sigma_1) \} \cos 2\pi (\tau \omega + \sigma \omega_F) t. \\ &\quad \tau + \sigma \text{ geradzahlig} \end{aligned} \right.$$

Entsprechend wird

$$\eta = \kappa [(I + I_2)(I_2 + I_3) + II_2] + \kappa I^2 \sigma_1 \sigma_2 \cos 2\pi \cdot 2\omega_F t \\ - 2\kappa I^2 \sigma_2 \sum_{\tau=1 \dots \infty} \sum_{\sigma=-\infty \dots +\infty} \frac{1}{\tau} J_{\frac{\tau+\sigma}{2}}(\tau \sigma_1) \{ J_{\frac{\tau-\sigma-2}{2}}(\tau \sigma_2) \\ - J_{\frac{\tau-\sigma+2}{2}}(\tau \sigma_2) \} \cos 2\pi (\tau \omega + \sigma \omega_F) t. \\ \tau + \sigma \text{ geradzahlig.}$$

2. Wir legen der Berechnung und Zeichnung den Spezialfall zugrunde, daß in

$$I_1 = n_1 h, \quad I_2 = n_2 h$$

die parabolischen Quantenzahlen die Werte

$$n_1 = 2, \quad n_2 = 1$$

und daß in

$$I_3 = n_3 h$$

die azimutale den Wert

$$n_3 = 1$$

habe, behandeln also eine vierquantige Bahn ( $n = n_1 + n_2 + n_3 = 4$ ). Das Parabelviereck, das dann in der Meridianebene die Bewegung begrenzt, wird nach Sommerfeld a. a. O. S. 823 oder direkter nach Kramers, a. a. O. S. 302 Gleichung 47 (wo die beiden Radikanden Null zu setzen sind), durch die vier Parabeln

$$\left. \begin{aligned} \xi_{\max} \\ \xi_{\min} \end{aligned} \right\} = \frac{a}{n} (\sqrt{n_1} \pm \sqrt{n_1 + n_3})^2, \\ \left. \begin{aligned} \eta_{\max} \\ \eta_{\min} \end{aligned} \right\} = \frac{a}{n} (\sqrt{n_2} \pm \sqrt{n_2 + n_3})^2$$

gebildet.  $a = \pi l^2$  ist die halbe große Achse der Bahnellipse. Setzen wir sie zur Erzielung bequemer Zahlenwerte gleich 10 cm — sie behält bei allen Veränderungen der Bahnellipse (angenähert) den gleichen Wert — so wird

$$\xi_{\max} = 24,75, \quad \xi_{\min} = 0,25, \quad \eta_{\max} = 14,57, \quad \eta_{\min} = 0,43.$$

(Fig. 1. Der Kern  $K$  liegt im Brennpunkte der Parabeln.)

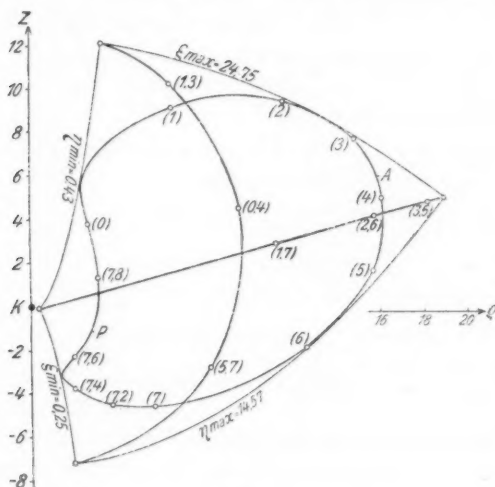


Fig. 1

$\omega$  ist in unserm Falle etwa  $10^{14}$ ,  $\omega_F$  selbst bei einem Felde von 100000 Volt/cm nur  $8 \cdot 10^8$ ). Somit sorgt in den Fourierreihen (1) der Summand  $2\pi\sigma\omega_F t$  im Argumente des Cosinus bei den praktisch in Frage kommenden mäßigen  $\sigma$ -Werten lediglich für eine langsame Änderung des durch den Summanden  $2\pi\tau\omega t$  bedingten raschen Umlaufs.  $2\pi\omega_F t$  kann für die Dauer eines solchen Umlaufs, das ist für die Zeit  $1/\omega$ , als Konstante behandelt werden. Im Laufe längerer Zeit ändert sich diese „Konstante“, und damit ändert sich die Bahnform in der Meridianebene.

1) Vgl. etwa E. Buchwald, Das Korrespondenzprinzip, Braunschweig 1923, S. 5 und 82. Auf S. 82 steht versehentlich dafür  $10^{15}$ .

Der Ausgangspunkt sei die Zeit  $t = 0$ . Dann ist  $2\pi\omega_F t = 0$ , und die doppelten Fourierreihen (1) lassen sich nach dem Additionstheorem der Besselschen Funktionen<sup>1)</sup> zu einfachen zusammenziehen:

$$\xi = \kappa [(I + I_1)(I_1 + I_3) + II_1] + \kappa I^2 \sigma_1 \sigma_2 \\ - 2\kappa I^2 \sigma_1 \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{1}{\tau} \{J_{\tau-1}(\tau \overline{\sigma_1 + \sigma_2}) - J_{\tau+1}(\tau \overline{\sigma_1 + \sigma_2})\} \cos 2\pi \tau \omega t,$$

$$\eta = \kappa [(I + I_2)(I_2 + I_3) + II_2] + \kappa I^2 \sigma_1 \sigma_2 \\ - 2\kappa I^2 \sigma_2 \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{1}{\tau} \{J_{\tau-1}(\tau \overline{\sigma_1 + \sigma_2}) - J_{\tau+1}(\tau \overline{\sigma_1 + \sigma_2})\} \cos 2\pi \tau \omega t.$$

Die Berechnung unter Ausnützung aller bei Jahnke-Emde angegebenen Ordnungen<sup>2)</sup> liefert als Bahn die Links-Rechts-Diagonale im Parabelviereck: bei  $t = 0$  liegt das Elektron im linken Eckpunkte in größter Kernnähe (Fig. 1), nach einer halben Schwingung, zur Zeit  $t = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\omega}$ , im rechten Eckpunkt in Kerferne. Die Zwischenpunkte (1.7), (2.6), (3.5) werden beim Gang nach rechts nach  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{2}{8}$ ,  $\frac{3}{8}$  Schwingungsdauer und wiederum beim Rückweg nach  $\frac{7}{8}$ ,  $\frac{6}{8}$ ,  $\frac{5}{8}$  Schwingungsdauer erreicht. Da die gleiche Reihe in  $\xi$  wie in  $\eta$  auftritt, besteht zwischen  $\xi$  und  $\eta$  eine lineare Beziehung, die bei unsern Zahlenwerten

$$\xi = 1,733 \eta - 0,5$$

lautet.

3. Nach dem Verlauf zahlreicher Schwingungen  $\omega$  ist die Zeit auf  $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\omega_F}$  angewachsen,  $2\pi\omega_F t = \frac{\pi}{4}$  geworden. Der Bahnverlauf in der Meridianebene, zu dem nunmehr die Diagonalbahn gediehen ist, wird aus den doppelten Fourierreihen (1) entnommen. Unter Berücksichtigung vieler Partial-schwingungen (denn die Reihen konvergieren schlecht) berechnen sich für einen Zeitpunkt  $t' = 0$ , der von  $t = 0$  um

1) Siehe z. B. P. Schafheitlin, Die Theorie der Besselschen Funktionen, Leipzig u. Berlin 1908, S. 79 ff.

2) Bei den Rechnungen und einem Teile der Figuren hat mich cand. phys. Ernst Müller in dankenswerter Weise unterstützt.

ein ganzzahliges Vielfaches von  $1/\omega$  abliegt, und für sieben weitere Zeitpunkte, die in Abständen von einer Achtel-schwingungsdauer aufeinander folgen, die Koordinatenwerte

$$\begin{aligned}
 t' = 0 & : \xi = 8,71 \quad \eta = 0,78, \\
 t' = \frac{1}{8} \frac{1}{\omega} & : \xi = 20,36 \quad \eta = 2,05, \\
 t' = \frac{2}{8} \frac{1}{\omega} & : \xi = 24,38 \quad \eta = 5,51, \\
 t' = \frac{3}{8} \frac{1}{\omega} & : \xi = 24,46 \quad \eta = 9,01, \\
 t' = \frac{4}{8} \frac{1}{\omega} & : \xi = 21,92 \quad \eta = 11,83, \\
 t' = \frac{5}{8} \frac{1}{\omega} & : \xi = 17,53 \quad \eta = 14,01, \\
 t' = \frac{6}{8} \frac{1}{\omega} & : \xi = 10,98 \quad \eta = 14,49, \\
 t' = \frac{7}{8} \frac{1}{\omega} & : \xi = 2,69 \quad \eta = 11,76.
 \end{aligned}$$

Diese Punkte sind in Fig. 1 als (0), (1), (2) ... (7) eingetragen, (zweckmäßigerweise nach vorheriger Umrechnung der parabolischen Koordinaten in kartesische gemäß  $z = \frac{\xi - \eta}{2}$  und  $\varrho = \sqrt{\xi \eta}$ ), und liefern eine Kurve von palettenförmiger Gestalt. Das am schnellsten durchlaufene Intervall (7)  $\rightarrow$  (0) mit seiner charakteristischen Einbuchtung ist nochmals durch vier zeitlich äquidistante Punkte (7,2) bis (7,8) unterteilt. Zwischen (7,6) und (7,8) liegt der kernnächste Punkt *P*, draußen zwischen (3) und (4) der kernfernste *A*.

4. Wir gehen nochmals um die gleiche relativ große Zeitspanne  $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\omega_F}$  weiter, die zwischen der ersten Diagonale und der „Palette“ lag. Dann ist  $t$  auf  $\frac{2}{8} \cdot \frac{1}{\omega_F}$ ,  $2\pi\omega_F t$  auf  $\frac{\pi}{2}$  angewachsen, und die doppelten Fourierreihen werden nach dem Additionstheorem der Besselschen Funktionen wieder zu einfachen, deren Koeffizienten diesmal Funktionen des Arguments  $\tau(\sigma_1 - \sigma_2)$  sind. Wieder tritt in  $\xi$  und  $\eta$  die gleiche Reihe auf; wieder besteht also zwischen beiden eine lineare Beziehung, in diesem Falle

$$\xi = 25,50 - 1,733 \eta.$$

Das Elektron pendelt jetzt in der „zweiten“ Diagonale zwischen dem oberen und unteren Eckpunkt, die kernferner und kernnächster Punkt sind, und befindet sich nach Verlauf von je ein achteil Schwingungsdauer in den in Fig. 1 angedeuteten Punkten, deren Bezeichnung denen in der ersten Diagonale entspricht. Bei Schwingungsbeginn, d. h. bei  $t$  gleich einem ganzzahligen Vielfachen von  $1/\omega$ , liegt es in einem mittleren Punkte (0.4).

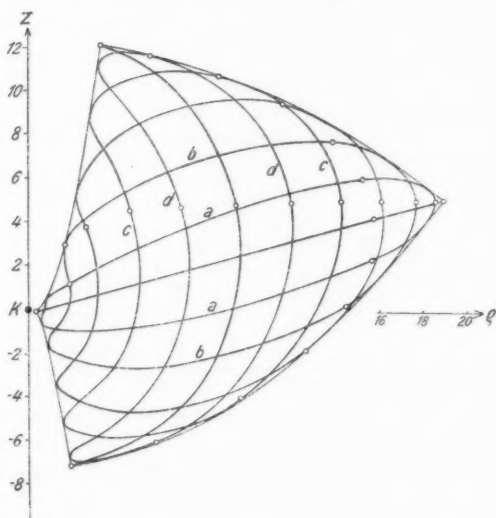


Fig. 2

5. Um den allmählichen Übergang von erster Diagonale ( $t = 0$ ) über Palette ( $t = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\omega_F}$ ) zur zweiten Diagonale ( $t = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{\omega_F}$ ) zu zeigen, sind in Fig. 2 außer diesen drei Kurvenzügen noch vier Zwischenformen eingezeichnet, die sich den genannten in gleichen Zeitintervallen einfügen und wiederum die typische Einbuchtung in Kernnähe zeigen:  $a$  und  $b$  werden bei  $t = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{\omega_F}$  und  $t = \frac{2}{24} \cdot \frac{1}{\omega_F}$  durchlaufen,  $c$  und  $d$  bei

$t = \frac{4}{24} \cdot \frac{1}{\omega_F}$  und  $t = \frac{5}{24} \cdot \frac{1}{\omega_F}$ . In diesen Kurven sind zur Kennzeichnung des zeitlichen Verlaufs die in Abständen von einer Viertelschwingungsdauer erreichten Punkte hervorgehoben.

Im Verlauf der „langen“ Zeit  $\frac{1}{2\omega_F} \left( \frac{1}{16} 10^{-10} \text{ Sekunden} \right)$  gegenüber  $\frac{1}{\omega} = 10^{-14}$  für den Umlauf im Parabelviereck) entwickelt sich also die Bahnform etwa rechtsläufig aus der ersten Diagonale zur zweiten und kehrt linksläufig — vgl. die entsprechende Änderung des Umlaufsinnns bei den Lissajous-

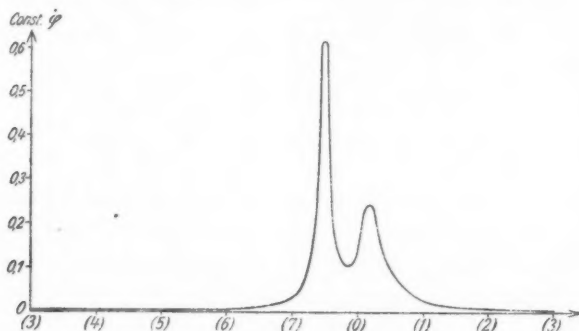


Fig. 3

figuren — in die erste zurück. Dann wiederholt sich der Vorgang. Die Herauszeichnung und Aneinanderreihung der Einzelformen von Fig. 2 liefert in Anschütz' stroboskopischer Trommel ein anziehendes Bild der zeitlichen Änderungen innerhalb der Meridianebene.

6. Der räumliche Verlauf der Elektronenbahn, die Umschlingung des Kerns in einen angenäherten Keplerellipse, ergibt sich dadurch, daß die Meridianebene von Fig. 1 oder 2, während das Elektron in ihr eine der gezeichneten Kurven durchläuft, mit einer Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  um die  $z$ -Achse rotiert. Nach der Theorie ist  $\dot{\varphi}$  umgekehrt proportional dem Produkte  $\xi \eta$ . Wir entnehmen, an die Palette der Nr. 3 anknüpfend, aus Fig. 1 die Werte von  $1/\xi \eta$  und kommen so zu Fig. 3. Darnach ist die relative Winkelgeschwindigkeit klein

in dem großen Bahnbereich zwischen Punkt (1) und (7) mit einem flachen Minimum bei (4). Im Bereiche (7)→(0)→(1) aber erreicht sie beim Durchgang durch zwei Maxima erhebliche Werte. Durch graphische Integration bilden wir hieraus die zeitlichen Mittelwerte des relativen  $\dot{\varphi}$  für die einzelnen Strecken (0)→(1), . . . (7)→(0); das sind wegen der zeitlichen Äquidistanz dieser Punkte auch die relativen Werte des Winkels  $\varphi$ , um den sich die Meridianebene dreht, während (0)→(1) . . . durchlaufen wird.

Die Absolutwerte des  $\varphi$  sind so zu normieren, daß, wie die Theorie verlangt, ein Umlauf um die  $z$ -Achse sich in der gleichen Zeit  $1/\omega$  abspielt wie ein Umlauf in der Meridianebene. Die einfache Rechnung führt zu folgenden Werten  ${}_i\varphi_{i+1}$ : während der einzelnen Bahnstücke  $i \rightarrow i + 1$

$$\begin{array}{rcl} {}_4\varphi_5 & = & 4^0 \\ {}_5\varphi_6 & = & 5^0 \\ {}_6\varphi_7 & = & 18^0 \\ {}_7\varphi_0 & = & 202^0 \\ {}_0\varphi_1 & = & 106^0 \\ {}_1\varphi_2 & = & 15^0 \\ {}_2\varphi_3 & = & 6^0 \\ {}_3\varphi_4 & = & 4^0 \\ & & \hline & & 360^0 \end{array}$$

Das kritische Stück (7)→(0) mit seinen  $202^0$  sei nochmals der Fig. 1 entsprechend unterteilt:

$$\begin{array}{rcl} {}_7\varphi_{7,3} & = & 10^0 \\ {}_{7,3}\varphi_{7,4} & = & 35^0 \\ {}_{7,4}\varphi_{7,6} & = & 93^0 \\ {}_{7,6}\varphi_{7,8} & = & 39^0 \\ {}_{7,8}\varphi_0 & = & 25^0 \\ & & \hline & & 202^0 \end{array}$$

Mit diesen Zahlenwerten ist in Fig. 4 die Bahnellipse des Elektrons aus der punktierten Palette in Kavalierperspektive konstruiert, mit dem Verkürzungsverhältnis  $\frac{1}{2}$  und mit  $45^0$  als Winkel zwischen  $y$ - und  $x$ -Achse. Der kernferne Punkt  $A$  der Fig. 1, etwa auf  $\frac{3}{4}$  der Strecke (3)→(4) gelegen, ist in der Zeichenebene gelassen. Er wird Aphel. Gegen ihn wird (4) um etwa  $\frac{1}{4}$  von  ${}_3\varphi_4$ , also um  $1^0$  nach hinten in die Lage (4') herausgedreht, Punkt (5) um  $1 + {}_4\varphi_5 = 5^0$  nach (5'), (6) um weitere  $5^0$  ( ${}_6\varphi_6!$ ), also um  $10^0$  nach (6'), (7) ist um  $28^0$ , (7,2) um  $38^0$ , (7,4) um  $73^0$ , (7,6) um  $166^0$  gedreht. Der kernnächste

Punkt  $P$ , der dann auf der Palette folgt, wird gerade um  $180^\circ$  geschwenkt, kommt also wieder in die Zeichenebene zu liegen und zwar in die Verlängerung der Geraden Aphel—Kern; er ist das Perihel  $P'$  Und so fort. Es entsteht die stark ausgezogene Bahn im Raume. Daß es eine Ellipse ist weist man nach einfachen Regeln perspektivischer Zeichnung nach. Durch unmittelbares Ausmessen überzeugt man sich, daß die große Achse  $2a = 20$  cm geworden ist.

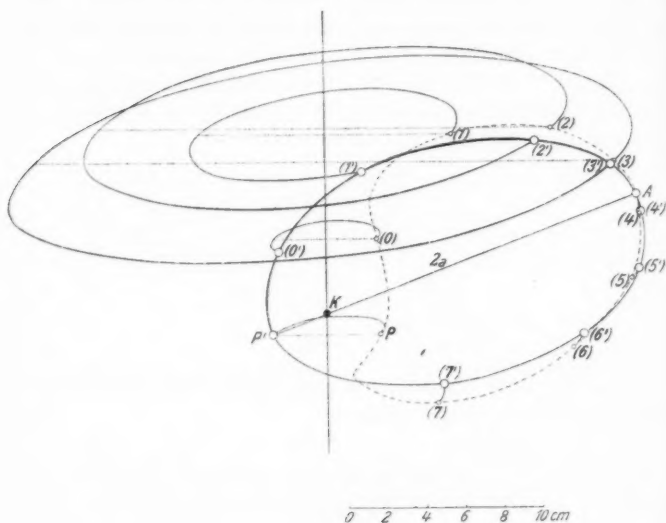


Fig. 4

Die Ebene der Bahnellipse steht nicht senkrecht auf der die große Achse enthaltenden Papierebene; das Elektron läuft vom Aphel nicht senkrecht, sondern nach hinten unten aus der Papierebene heraus und kehrt schließlich über  $(2')$ ,  $(3')$  von vorn oben ins Aphel zurück. Die Ebene der Bahnellipse ist um die große Achse im Sinne des Uhrzeigers gedreht, wenn man vom Aphel zum Kern blickt. Um welchen Winkel läßt sich graphisch ermitteln.

7. Entsprechendes gilt für die übrigen auseinander hervorgehenden Kurven der Fig. 2. Bei der ersten Diagonale z. B.



(Fig. 5) werde wieder das Aphel  $A_1$  in der Zeichenebene gelassen, der rechte Eckpunkt des Parabelvierecks. Daß der linke Eckpunkt um  $180^\circ$  gedreht und zum Perihel  $P'$  wird, ist aus dem symmetrischen Durchlaufen der Diagonale, wie es sich in der Doppelbezeichnung (1.7), (2.6) ... (Fig. 1) ausspricht, ersichtlich. Hieraus folgt auch, daß die Halbellipsen vor und hinter der Zeichenebene spiegelbildlich zueinander liegen, mit anderen Worten, daß die Ebene der Ellipse senkrecht auf der Papierebene steht. Die große Achse  $A_1 P'$  wird wieder ausmeßbar:  $2a = 20$  cm. Die Exzentrizität  $\varepsilon$ , aus der Entfernung Kern—Achsenmittelpunkt  $M_1$  (gleich  $\varepsilon a$ ) zu entnehmen, ist in diesem extremen Falle denkbar groß.

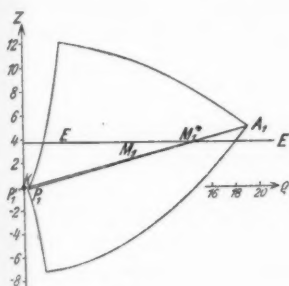


Fig. 5

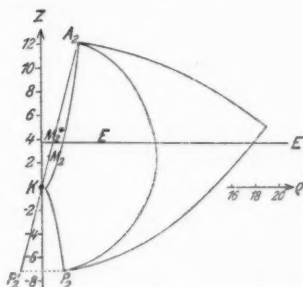


Fig. 6

Andererseits ergibt sich beim Diagonalverlauf  $A_2 P_2$  (Fig. 6), der nach Nr. 4 um  $1/4 \omega_F$  später erreicht wird, eine senkrecht zum Papier liegende Ellipse von geringstmöglicher Exzentrizität. Jetzt wird der untere Eckpunkt um  $180^\circ$  geschwenkt und wird Perihel  $P_2'$ . Die lange Achse wird wieder 20 cm. Wie nahe steht aber jetzt der Kern dem Achsenmittelpunkt  $M_2$  und wie weit hängt das untere Ellipsenende über  $K$  über!

Die Figuren 5 und 6 sind nicht zu einer vereinigt, weil die Zeichenebene der Fig. 5, die die lange Achse der exzentrischesten Ellipse enthält, nicht die gleiche ist wie die von Fig. 6 mit ihrer langen Achse der am wenigsten exzentrischen. Vielmehr stehen beide aufeinander senkrecht. Man erkennt das mit Hilfe von Fig. 1. Der rechte Parabeleckpunkt wird zur Zeit  $1/2 \omega$  erreicht, die Zeichenebene der Fig. 5 ist mithin die

Meridianebene zur Zeit  $t = \frac{1}{2\omega}$ . Bei der zweiten Diagonale aber ist das Elektron zu einer Zeit, die um ein ganzzahliges Vielfaches von  $1/\omega$  später liegt, also zu einer Zeit, wo die kreisende Meridianebene wieder einmal in die Lage  $\varphi_t = \frac{1}{2\omega}$  gelangt ist, nicht im oberen Eckpunkt  $A_2$ , sondern nach Zurücklegung der ersten Halbschwingung bei (0.4) auf dem Wege nach unten. In  $A_2$  ist es um  $1/4\omega$  früher gewesen, und in dieser Zeit ist die Meridianebene um  $90^\circ$  gelaufen, wie eine Diskussion der relativen  $\dot{\varphi}$  ergibt. Die Zeichenebene der Fig. 6,  $A_2$  enthaltend, ist somit die Ebene  $\varphi_t = \frac{1}{2\omega} - 90^\circ$ . Q. e. d.

Die langen Achsen der aus den übrigen Bahnformen von Fig. 2 entstehenden Ellipsen liegen in Meridianebenen zwischen  $\varphi_t = \frac{1}{2\omega}$  und  $\varphi_t = \frac{1}{2\omega} - 90^\circ$ .

8. Zur Veranschaulichung einer weiteren Gesetzmäßigkeit, die dann zur Bohrschen Darstellung des Vorgangs überleitet, sind in Fig. 5 und 6 die Punkte  $M_1^*$  und  $M_2^*$  auf der großen Achse bezeichnet, die um  $\frac{3}{2}\varepsilon a$  vom Kern abliegen, das ist um den anderthalbfachen Abstand Kern-Ellipsenmitte. Sie heißen die „elektrischen Mittelpunkte“ der beiden Kepler-ellipsen, weil sie die mittlere Lage des Elektrons während eines Umlaufs angeben. Man erkennt, daß  $M_1^*$  und  $M_2^*$  in der gleichen Ebene senkrecht zur Feldrichtung liegen, die sich in der Zeichnung als Gerade  $E$  markiert.

Dasselbe gilt, wie man aus den Kurven Fig. 2 nach einfacher Vervollständigung unmittelbar nachmessen kann, für alle aus den Zwischenformen hervorgehenden Keplerellipsen. Der Abstand des elektrischen Mittelpunkts vom Achsendurchstoßungspunkte der Ebene  $E$  hat seinen Maximalwert (14 cm) in Fig. 5, seinen Minimalwert (1 cm) in Fig. 6. Berücksichtigt man die verschiedenen Lagen der die großen Achsen enthaltenden Meridianebenen (Nr. 7), so heißt das: der elektrische Mittelpunkt bewegt sich in der Ebene  $E$  während der Zeit  $1/4\omega_F$  aus einer  $z$ -achsenfernen Lage  $M_1^*$  im Uhrzeigersinn in eine  $z$ -achsennahe Lage  $M_2^*$ . Man kann aus Symmetriegründen fortfahren: und in drei weiteren Zeitabschnitten  $1/4\omega_F$  noch

dreimal um entsprechende Kurvenstücke, so daß während  $1/\omega_F$  eine geschlossene symmetrisch gelegene Kurve um den Durchstoßungspunkt entsteht. Die Theorie weist nach, daß es eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{3}{2} \propto I \{ \sqrt{I_1(I_2 + I_3)} \pm \sqrt{I_2(I_1 + I_3)} \}$$

ist, was in unserem Falle die obigen Zahlenwerte ergibt, und daß diese Ellipse *harmonisch* durchlaufen wird.

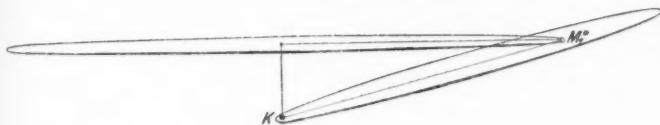


Fig. 7

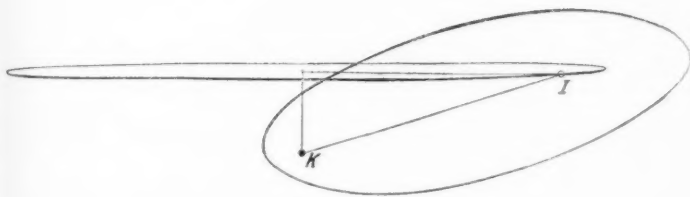


Fig. 8

Die Bilder 7 bis 10 geben in der gleichen Perspektive wie Fig. 4 für äquidistante Zeitintervalle  $\frac{1}{12} \frac{1}{\omega_F}$  die Lagen  $M_1^*$ ,  $I$ ,  $II$ ,  $M_2^*$  des elektrischen Mittelpunkts auf seiner langgestreckten horizontal liegenden harmonischen Ellipse an. Hiermit ist Lage und Länge der großen Achse für die sich in säkularer Störung langsam wandelnde Keplerellipse sowie deren Exzentrizität für jeden Zeitpunkt bestimmt. Wie liegt ihre Bahnebene? Sie steht in den Scheitelpunkten  $M_1^*$  und  $M_2^*$  nach Nr. 7 senkrecht auf der Ebene durch  $z$ -Achse und große Keplerachse und ist in den Zwischenlagen so um die große Keplerachse gedreht, daß die Projektion der Keplerellipsen-

fläche auf die  $x$ - $y$ -Ebene eine Konstante ist; so wird die in der Quantenbedingung

$$p_{\varphi} = n_3 \frac{h}{2\pi}$$

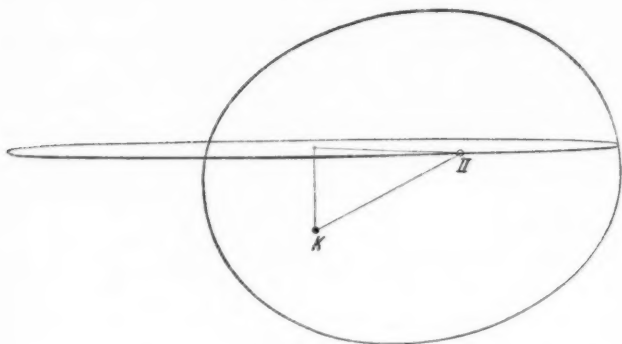


Fig. 9

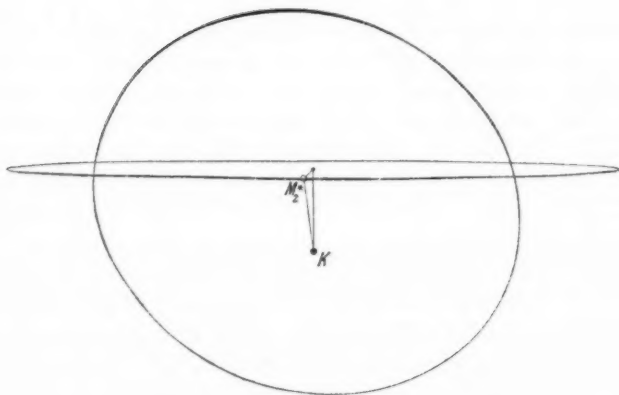


Fig. 10

geforderte Konstanz der nach der  $z$ -Achse genommenen Impulsmomentkomponente  $p_{\varphi}$  gewährleistet. In dem Quadranten  $M_1^* M_2^*$  ist der Drehsinn in Nr. 6, Schlußabsatz, angegeben; die Drehwinkel berechnen sich für I und II zu  $60\frac{1}{2}^\circ$  und  $70\frac{1}{2}^\circ$ .

Wir haben entsprechende Figuren für die acht weiteren zeitlich äquidistanten Stellen konstruiert und so den ganzen Lauf des  $M^*$  durch seine Ellipse zeichnerisch erfaßt. Geeignete photographische Verkleinerungen (Bildgröße  $4 \times 6$  cm) geben aneinandergereiht in der Anschützschen Trommel ein Bild der sich wandelnden Ellipsenformen. Abzüge stehen Interessenten zur Verfügung.<sup>1)</sup>

Danzig, Technische Hochschule.

---

1) Selbstkostenpreis der 12 Abzüge 1 RM.

(Eingegangen 16. Oktober 1926)

**6. Berechnung der Bahn  
von Kathodenstrahlen im axialsymmetrischen  
elektromagnetischen Felde;  
von H. Busch**

Vor einiger Zeit habe ich eine Methode der  $e/m$ -Bestimmung angegeben<sup>1)</sup>, die — ursprünglich nur zu Unterrichtszwecken ausgearbeitet — sich im Laufe der Versuche als sehr geeignet zu Präzisionsmessungen erwies.<sup>2)</sup> Im folgenden sollen die theoretischen Grundlagen der Methode mitgeteilt werden.

Das Meßverfahren beruht auf der bekannten Erscheinung, daß ein von einem Punkte  $P$  ausgehendes divergentes Kathodenstrahlbündel durch ein longitudinales, d. h. parallel zur Bündelachse gerichtetes Magnetfeld wieder in einem Punkte  $P'$  vereinigt, „fokussiert“ wird. Aus der Entfernung  $l$  zwischen Brennpunkt  $P'$  und Ausgangspunkt  $P$  in Verbindung mit der Stärke  $\mathfrak{H}$  des Magnetfeldes erhält man eine Beziehung zwischen der Elektronengeschwindigkeit  $v$  und ihrer spezifischen Ladung

$\eta = \frac{e}{m}$ , die, in üblicher Weise mit einer zweiten, etwa aus dem von den Elektronen durchfallenen Entladungspotential  $V$  zu gewinnenden Gleichung kombiniert,  $\eta$  und  $v$  einzeln zu berechnen gestattet.

Im Falle eines homogenen Magnetfeldes ist jene Beziehung sehr einfach; hier bilden die Elektronenbahnen die bekannten regelmäßigen Schraubenlinien und die besagte Beziehung lautet:

$$(1) \quad l = \frac{2\pi v}{\eta \mathfrak{H}} \cos \alpha,$$

worin  $\alpha$  den Winkel bedeutet, den die Anfangsrichtung der Elektronenbahn mit  $\mathfrak{H}$  bildet.<sup>3)</sup>

1) H. Busch, Physik. Ztschr. 23. S. 438. 1922.

2) Eine solche Präzisionsbestimmung ist im hiesigen Physikalischen Institut im Gange und steht kurz vor dem Abschluß.

3) Zu beachten ist, daß wegen des Faktors  $\cos \alpha$  die Abbildung des Punktes  $P$  in  $P'$  — in der Sprache der geometrischen Optik — nicht

Bei der praktischen Ausführung ist aber das Magnetfeld nicht streng homogen; es wird vielmehr durch eine Spule von endlicher Länge  $L$  erzeugt und  $L$  läßt sich aus technischen Gründen nicht so groß machen, daß das Feld mit genügender Annäherung als homogen betrachtet werden kann. Infolgedessen werden die Elektronenbahnen von der Form der regulären Schraubenlinien abweichen und damit Formel (1) sich ändern. Die genaue Ermittlung dieses Einflusses ist der Zweck der folgenden Mitteilung.

2. Dazu sind zunächst die Elektronenbahnen zu berechnen. Wir behandeln sogleich den nicht wesentlich komplizierteren allgemeinen Fall, daß außer dem magnetischen Feld, dargestellt durch sein Vektorpotential  $\mathfrak{A}$ :

$$(2) \quad \mathfrak{H} = \text{curl } \mathfrak{A}$$

noch ein elektrostatisches Feld, dargestellt durch sein skalares Potential  $V$ :

$$(3) \quad \mathfrak{E} = - \text{grad } V$$

vorhanden ist. Dann ist die Kraft  $\mathfrak{R}$ , die ein mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  fliegendes Elektron erfährt, bzw. seine Beschleunigung  $\mathbf{p}$ :

$$(4) \quad \begin{cases} \mathfrak{R} = m \mathbf{p} = e [\mathbf{v} \mathfrak{H}] + e \mathfrak{E} \\ \quad \quad \quad = e [\mathbf{v} \text{curl } \mathfrak{A}] - e \text{grad } V \end{cases}$$

oder in Zylinderkoordinaten  $r, \varphi, z$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta} \mathbf{p}_r &= v_\varphi \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r \mathfrak{A}_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial \mathfrak{A}_r}{\partial \varphi} \right) - v_z \left( \frac{\partial \mathfrak{A}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial r} \right) - \frac{\partial V}{\partial r}, \\ \frac{1}{\eta} \mathbf{p}_\varphi &= v_z \left( \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{r \partial \varphi} - \frac{\partial \mathfrak{A}_\varphi}{\partial z} \right) - v_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r \mathfrak{A}_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial \mathfrak{A}_r}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial V}{r \partial \varphi}, \\ \frac{1}{\eta} \mathbf{p}_z &= v_r \left( \frac{\partial \mathfrak{A}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial r} \right) - v_\varphi \left( \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{r \partial \varphi} - \frac{\partial \mathfrak{A}_\varphi}{\partial z} \right) - \frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned}$$

„aberrationsfrei“ ist. Eine strenge aberrationsfreie Strahlenvereinigung in einem Punkte erfolgt nur entweder bei engen Büscheln, bei denen  $\alpha$  so klein ist, daß für alle Strahlen mit genügender Annäherung  $\cos \alpha = 1$  gesetzt werden kann, oder bei Bündeln von einheitlichem  $\alpha$ , d. h. Bündeln von schmalen ringförmigen Querschnitt.

Hierfür läßt sich schreiben:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{1}{\eta} p_r = v_\varphi \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial r \mathfrak{A}_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial r} + v_r \frac{\partial \mathfrak{A}_r}{\partial r} - \frac{d \mathfrak{A}_r}{dt} - \frac{\partial V}{\partial r}, \\ \frac{1}{\eta} p_\varphi = v_z \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{r \partial \varphi} + v_r \frac{\partial \mathfrak{A}_r}{r \partial \varphi} + v_\varphi \frac{\partial \mathfrak{A}_\varphi}{r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{d(r \mathfrak{A}_\varphi)}{dt} - \frac{\partial V}{r \partial \varphi}, \\ \frac{1}{\eta} p_z = v_r \frac{\partial \mathfrak{A}_r}{\partial z} + v_\varphi \frac{\partial \mathfrak{A}_\varphi}{\partial z} + v_z \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z} - \frac{d \mathfrak{A}_z}{dt} - \frac{\partial V}{\partial z}, \end{cases}$$

worin der Operator

$$\frac{d}{dt} = v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_\varphi \frac{\partial}{r \partial \varphi} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

die zeitliche Änderung der betreffenden Größe, beurteilt von einem mit dem Elektron mitbewegten Beobachter, bedeutet.

Wir spezialisieren nun die allgemeinen Gleichungen (5) auf den Fall axialer Symmetrie, die ja bei dem Felde einer exakt gewickelten Spule stets vorhanden ist. Symmetrieachse sei die  $z$ -Achse. Dann fällt die Richtung von  $\mathfrak{A}$  in die  $\varphi$ -Richtung, der Betrag  $A$  von  $\mathfrak{A}$  ist unabhängig von  $\varphi$ :

$$\mathfrak{A}_z = \mathfrak{A}_r = 0; \quad \mathfrak{A}_\varphi = A; \quad \frac{\partial A}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial V}{r \partial \varphi} = 0.$$

Gehen wir damit in das Gleichungstriplet (5) ein und drücken gleichzeitig die Beschleunigungskomponenten  $p_r$ ,  $p_\varphi$  und  $p_z$  in bekannter Weise durch die Ableitungen der Koordinaten nach der Zeit  $\dot{r}$ ,  $\dot{\varphi}$  usw. aus, so erhalten wir:

$$(6a) \quad \frac{1}{\eta} p_r = \frac{1}{\eta} (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) = v_\varphi \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial (r A)}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial r},$$

$$(6b) \quad \frac{1}{\eta} p_\varphi = \frac{1}{\eta} (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) = - \frac{1}{r} \frac{d(r A)}{dt},$$

$$(6c) \quad \frac{1}{\eta} p_z = \frac{1}{\eta} \ddot{z} = v_\varphi \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Wir behandeln zunächst Gleichung (6b). Sie läßt sich schreiben:

$$r^2 \ddot{\varphi} + 2 r \dot{r} \dot{\varphi} = \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = - \eta \frac{d(r A)}{dt};$$

integriert

$$r^2 \dot{\varphi} = - \eta r A + \text{const.}$$

$$(7b) \quad v_\varphi = r \dot{\varphi} = - \eta A,$$

denn das Glied  $\text{const.}/r$  muß hier verschwinden, weil die von uns betrachteten Elektronenbahnen durch die Achse ( $r=0$ ) gehen und dort  $v_\varphi$  endlich bleiben muß. Setzen wir diesen Wert für  $v_\varphi$  in die Gleichungen (6a) und (6c) ein, so ergibt sich



$$(7a) \quad \ddot{r} = -\eta^2 A \frac{\partial A}{\partial r} - \eta \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2} \eta^2 A^2 + \eta V \right),$$

$$(7c) \quad \ddot{z} = -\eta^2 A \frac{\partial A}{\partial z} - \eta \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \eta^2 A^2 + \eta V \right).$$

Zur Probe bilden wir

$$\int (2\dot{r}\ddot{r} + 2\dot{z}\ddot{z}) dt = \dot{r}^2 + \dot{z}^2 = -\eta^2 A^2 - 2\eta V + \text{const.}$$

oder wegen (7b):

$$\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + \dot{z}^2 + v_\varphi^2) + \eta V = \text{const.},$$

d. h. die Summe von kinetischer Energie  $\frac{1}{2} m v^2$  und potentieller Energie  $eV$  der Elektronen bleibt konstant, wie es sein muß.

3. Wir wenden unsere Bewegungsgleichungen (7a bis 7c) zunächst auf den schon vielfach behandelten Fall eines *homogenen* Magnetfeldes (ohne elektrostatisches Feld) an; die Feldstärke  $\mathfrak{H}$  liege in der Richtung der  $z$ -Achse. Das Vektorpotential dieses Feldes ist

$$\mathfrak{A}_\varphi = A = \frac{r}{2} \mathfrak{H}.$$

Damit gehen die Bewegungsgleichungen (7) über in

$$(8a) \quad \ddot{r} = -\eta^2 \frac{r}{4} \mathfrak{H}^2 = -\omega^2 r,$$

$$(8b) \quad \left\{ \begin{array}{l} r \dot{\varphi} = -\eta \frac{r}{2} \mathfrak{H} = -\omega r \\ \dot{\varphi} = -\omega, \end{array} \right. \quad \text{oder}$$

$$(8c) \quad \ddot{z} = 0,$$

worin  $\omega$  zur Abkürzung gesetzt ist für die Konstante

$$(9) \quad \omega = \frac{1}{2} \eta \mathfrak{H}.$$

Die drei Gleichungen (8) lassen sich leicht integrieren und ergeben

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = r_0 \cos \omega t \\ \varphi = -\omega t \\ z = w_0 t, \end{array} \right.$$

worin  $r_0$  und  $w_0$  Integrationskonstanten sind; die übrigen noch auftretenden Integrationskonstanten sind unwesentlich, sie legen nur die Anfangspunkte der Zählung von  $t$ ,  $\varphi$  und  $z$  fest und

sind hier mit Rücksicht auf das Folgende so gewählt, daß die Elektronenbahnen symmetrisch zum Koordinatennullpunkt liegen. Die Gleichungen (10) enthalten das bekannte, oben schon erwähnte Resultat, daß die Elektronenbahnen Schraubenlinien sind; ihre Projektionen auf die  $r, \varphi$ -Ebene sind durch den Ursprung gehende Kreise  $r = r_0 \cos \varphi$  vom Durchmesser  $r_0$ ; die Meridiankurven  $r(z)$  sind Kosinuslinien  $r = r_0 \cos \frac{\omega}{w_0} z$ .

Ausgangspunkt und Brennpunkt sind bestimmt durch die Bedingung  $r = 0$ , d. h.

$$\omega t = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$(11) \quad z = \pm \frac{w_0}{\omega} \frac{\pi}{2} = \pm \frac{w_0 \pi}{\eta \Phi} = \pm z_1.$$

Ist  $v$  die — für alle Elektronen als gleich angenommene — Geschwindigkeit, so ist ihre  $z$ -Komponente

$$(12) \quad w_0 = v \cos \alpha,$$

so daß sich für den Abstand zwischen Ausgangspunkt und Brennpunkt ergibt

$$(1) \quad l = 2z_1 = \frac{2\pi v}{\eta \Phi} \cos \alpha,$$

wie oben bereits vorweggenommen.

4. Bevor wir nun zu unserer eigentlichen Aufgabe übergehen, sei zunächst als Nebenergebnis der allgemeine Beweis dafür gegeben, daß bei einem genügend engen Kathodenstrahlenbündel die Fokussierung auch in einem beliebig inhomogenen Magnetfelde, auch bei gleichzeitig vorhandenem beliebig inhomogenen elektrostatischen Felde erfolgt, sofern nur beide Felder Zylindersymmetrie zur Bündelachse besitzen.

Dazu entwickeln wir  $A$  und  $V$  nach Potenzen von  $r$ . Berücksichtigt man dabei, daß wegen der Wirbelfreiheit des magnetischen Feldes (das Eigenfeld des Kathodenstrahls kann vernachlässigt werden)

$$\text{curl curl } \mathfrak{A} = 0,$$

d. h. hier

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r A)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0$$

sein muß, so ergibt sich für  $A$  die Entwicklung:

$$(14) \quad A = \frac{r}{2} f(z) - \frac{r^3}{2^2 \cdot 4} f''(z) + \frac{r^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} f^{(4)}(z) - \dots$$

und daraus für die Longitudinalkomponente der magnetischen Feldstärke

$$(14a) \quad \mathfrak{H}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial (\Delta r)}{\partial r} = f(z) - \frac{r^2}{2^2} f''(z) + \frac{r^4}{2^2 \cdot 4^2} f^{(4)}(z) - \dots,$$

worin  $f(z)$ , die magnetische Feldstärke am Orte der  $z$ -Achse, eine beliebig vorgegebene Funktion von  $z$ ,  $f''(z)$ ,  $f^{(4)}(z)$  usw. ihre Ableitungen nach  $z$  sind.

Für das elektrostatische Feld gilt die Poissonsche Gleichung:

$$(15) \quad \Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi \varrho.$$

Wir setzen die Raumladung  $\varrho$  und ihre räumlichen Diff.-Quotienten als stetig und axialsymmetrisch verteilt voraus dann läßt sie sich nach Potenzen von  $r^2$  entwickeln:

$$(16) \quad 4\pi \varrho = a_0(z) + r^2 a_2(z) + r^4 a_4(z) + \dots$$

Aus (15) und (16) folgt für  $V$  die Reihenentwicklung:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} V &= g(z) - \frac{r^2}{2^2} [g''(z) + a_0(z)] \\ &+ \frac{r^4}{4^2} \left[ \frac{1}{2^2} g^{(4)}(z) + \frac{1}{2^2} a_0''(z) - a_2(z) \right] - \dots, \end{aligned} \right.$$

worin  $g(z)$  wieder eine beliebig vorgegebene Funktion von  $z$ ,  $g''(z)$  usw. ihre Ableitungen nach  $z$  sind. Oder abgekürzt geschrieben:

$$(17a) \quad V = g(z) - \frac{r^2}{2^2} g_2(z) + \frac{r^4}{4^2} g_4(z) - \dots$$

Einsetzung der Reihen (14) und (17a) in die Bewegungsgleichungen (7a) und (7c) ergibt:

$$(18a) \quad \left\{ \begin{aligned} \ddot{r} &= -r \left[ \frac{\eta^2}{4} f^2(z) - \frac{\eta}{2} g_2(z) \right] \\ &+ r^3 \left[ \frac{\eta^2}{8} f'(z) f'''(z) - \frac{\eta}{4} g_4(z) \right] + \dots, \end{aligned} \right.$$

$$(18c) \quad \ddot{z} = -\eta g'(z) - r^2 \left[ \frac{\eta^2}{4} f(z) f'(z) - \frac{\eta}{4} g_2'(z) \right] + \dots,$$

und bei einem „engen“ Kathodenstrahlbündel, bei dem die Glieder mit zweiten und höheren Potenzen von  $r$  vernachlässigt werden können:

$$(19a) \quad \ddot{r} = -r \left[ \frac{\eta^2}{4} f^2(z) - \frac{\eta}{2} g_2(z) \right],$$

$$(19c) \quad \begin{cases} \ddot{z} = -\eta g'(z), & \text{oder integriert} \\ \dot{z}^2 = w_0^2 - 2\eta g(z). \end{cases}$$

Ist die Anfangslongitudinalgeschwindigkeit  $w_0$  für alle Elektronen die gleiche, was für enge Bündel homogener Geschwindigkeit stets zutrifft (vgl. Anm. 3 zu S. 974)<sup>1)</sup>, und betrachten wir — was ohne Beschränkung der Allgemeinheit zulässig ist — nur solche Elektronen, die den Ausgangspunkt  $P$  zu gleicher Zeit verlassen haben, so folgt aus (19c), daß  $z$  nur von  $t$ , nicht von  $r$  abhängt, und daher auch  $f$  und  $g$  als Funktionen von  $t$  allein anzusehen sind, und zwar *eindeutige* Funktionen von  $t$ , wenn wir den praktisch nicht interessierenden Fall eines

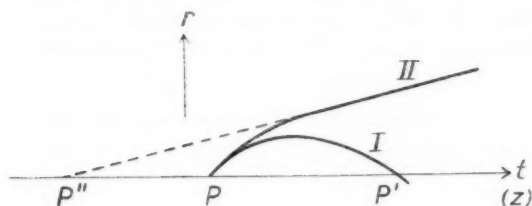


Fig. 1

elektrostatischen Gegenfeldes von solcher Stärke, daß die Bewegungsrichtung der Elektronen umgekehrt wird, ausschließen. Daher läßt sich Gleichung (19a) schreiben:

$$(20) \quad \ddot{r} = -r F(t),$$

worin  $F(t)$  bei genügender Stärke des Magnetfeldes wegen des quadratischen Ausdruckes  $\frac{\eta^2}{4} [f'(z)]^2$  eine positive GröÙe ist.

Unter dieser Voraussetzung sagt die Gleichung aus, daß  $\ddot{r}$  stets entgegengesetztes Vorzeichen wie  $r$  hat, d. h. daß die Kurve  $r(t)$  gegen die  $t$ -Achse konkav und um so stärker gekrümmt ist, je weiter sie sich von der  $t$ -Achse entfernt. Daraus folgt aber weiter, daß eine solche von einem Punkt  $P$  der  $t$ -Achse (Fig. 1) ausgehende Kurve bei genügender GröÙe

1) Bei der Braunschen Kathodenstrahlröhre, bei der der Ausgangspunkt  $P$  die Kathode ist, gilt dies für beliebig weite Büschel, weil die Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen praktisch zu vernachlässigen ist.

von  $F$ , d. h. genügend starkem Magnetfelde, bzw. bei genügend langem Verweilen des Kathodenstrahles im Magnetfelde, wieder zur  $t$ -Achse zurückkehren und diese, etwa im Punkt  $P'$ , schneiden muß. Ist nun  $r_1(t)$  eine solche spezielle Lösung der Diff.-Gleichung (20), so folgt aus der Linearität dieser Gleichung, daß alle Lösungen, welche durch den Punkt  $P$  gehenden Kurven entsprechen, die Form haben müssen:

$$(21) \quad r = C \cdot r_1(t),$$

worin  $C$  eine Integrationskonstante ist; das bedeutet, daß alle durch  $P$  gehenden Integralkurven auch durch  $P'$  gehen müssen.

Wegen des eindeutigen Zusammenhanges von  $t$  und  $z$  stellen die  $r(t)$ -Kurven gleichzeitig aber auch — nur mit verzerrtem Abszissenmaßstabe, — die  $r(z)$ -Kurven, d. h. die Meridiankurven der Elektronenbahnen dar; und daher folgt, daß unter den obigen Voraussetzungen alle von einem auf der  $z$ -Achse liegenden Raumpunkt  $P$  ausgehenden Elektronen wieder in einem Punkte  $P'$  der  $z$ -Achse vereinigt werden, womit der eingangs aufgestellte Satz bewiesen ist. Zu den dort angegebenen Voraussetzungen kommt nur noch die physikalisch ziemlich selbstverständliche Einschränkung hinzu, daß das Magnetfeld, falls es endliche Ausdehnung besitzt, genügend stark sein muß.

Diese Einschränkung ist übrigens bei geeigneter Fassung des Satzes nicht wesentlich. Denn wenn das Magnetfeld nicht stark genug ist, um die Kathodenstrahlen zur Achse zurückzubiegen, müssen die  $r(t)$ -Kurven nach Verlassen des Magnetfeldes ( $F(t) = 0$ ) geradlinig weiterlaufen (weil nach (20) für  $F(t) = 0$   $\ddot{r} = 0$  ist), so daß ihre rückwärtige Verlängerung die  $t$ -Achse, etwa in  $P''$ , (Fig. 1) schneidet. Da außerhalb des Magnetfeldes nach Gleichung (7b)  $\dot{\varphi} = 0$  ist, so folgt aus sinn-gemäßer Anwendung der obigen Beweisführung, daß bei einem schwachen Magnetfelde die Kathodenstrahlen nach Durchlaufen des Feldes so weiterfliegen, als ob sie von einem Punkte  $P''$  ausgingen. Auch in diesem Falle findet also eine Fokussierung statt, nur ist der Brennpunkt jetzt *virtuell* und liegt rückwärts der Strahlenquelle.

Man kann also bei einer Braunschen Kathodenstrahlröhre, bei der ja von der Fokussierung häufig Gebrauch ge-

macht wird (Konzentrationsspule), die Fokussierung durch eine beliebig geformte, an beliebiger Stelle der Röhre angebrachte Spule erreichen, wenn nur die Spulenachse mit der Röhrenachse zusammenfällt und der Strom genügend stark gemacht wird. Insbesondere ist nach dem vorstehenden Beweise *nicht* nötig, wie gelegentlich vermutet worden ist<sup>1)</sup>, daß die Spule bzw. ihr Magnetfeld *symmetrisch* zur Mitte zwischen Ausgangspunkt des Kathodenstrahlbündels (d. h. der Kathode) und dem Brennpunkt (d. h. dem Fluoreszenzschirm) liegt.

Für die *Schärfe* des Brennpunktes ist jedoch der Feldverlauf nicht gleichgültig, denn unser Beweis gilt *streng* nur dann, wenn in (18a) und (18c) die Glieder mit höheren Potenzen von  $r$  wirklich verschwinden, also ihre Koeffizienten Null werden, und das ist nach (18a) und (18c) im allgemeinen nur dann der Fall, wenn die Ableitungen der magnetischen und elektrischen Feldstärke verschwinden, d. h. beide Felder *homogen* sind. Bei inhomogenen Feldern bewirken die vernachlässigten Glieder stets eine Aberration, d. h. eine Unschärfe, und man kann sagen, daß diese Unschärfe im allgemeinen um so größer ist, je größer die ersten und höheren Ableitungen der Felder nach  $z$ , d. h. je inhomogener die Felder sind.<sup>2)</sup>

5. Wir kommen nun zu unserer eigentlichen Aufgabe, der wirklichen Berechnung der Elektronenbahnen in einem axialsymmetrischen, im übrigen aber inhomogenen Felde. Allgemein läßt sich dieses Problem nicht lösen, wohl aber für ein angenähert homogenes Feld. Nach Gleichung (14) und (14a) ist das Magnetfeld in dem Bereich, in dem wir es brauchen, vollständig gegeben durch seinen Wert  $f(z)$  längs der  $z$ -Achse.  $f(z)$  sei symmetrisch zum Koordinatennullpunkt und gegeben durch die Reihe

$$(22) \quad f(z) = \mathfrak{H}_0 \cdot h(z),$$

1) W. Rogowski u. W. Grösser, Arch. f. Elektrot. 15. S. 382. 1925.

2) Ganz trifft das nicht zu insofern, als nicht die Ableitungen selber, sondern Kombinationen der Ableitungen von  $f$  und  $g$  verschwinden müssen. Es besteht also theoretisch z. B. die Möglichkeit, bei gegebenem inhomogenen elektrostatischen Felde durch geeigneten Verlauf des magnetischen Feldes eines der höheren Glieder zum Verschwinden zu bringen, so daß unter Umständen ein inhomogenes Magnetfeld eine bessere Abbildung liefern kann als ein homogenes.

$$(23) \quad h(z) = 1 - a \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 - b \left( \frac{z}{z_0} \right)^4 - c \left( \frac{z}{z_0} \right)^6 - d \left( \frac{z}{z_0} \right)^8 - \dots$$

Ein elektrostatisches Feld sei nicht vorhanden.

Wird, wie bei der  $e/m$ -Bestimmung, das Feld erzeugt durch eine Spule von der Länge  $2z_0$ , dem Radius  $R$  und der Windungszahl pro cm Länge  $n$ , die vom Strom  $J$  durchflossen wird, so gilt die bekannte Formel

$$(24) \quad f(z) = 2\pi n J \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{R}{z_0 - z} \right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{R}{z_0 + z} \right)^2}} \right\},$$

und man erhält durch Reihenentwicklung nach McLaurin für die Koeffizienten:

$$(25) \quad \Phi_0 = \frac{4\pi n J}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z_0^2}}};$$

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{3}{2} \frac{R^2}{z_0^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{R^2}{z_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}}; \\ b &= \frac{5}{2} \frac{R^2}{z_0^2} \frac{1 - \frac{3}{4} \frac{R^2}{z_0^2}}{\left(1 + \frac{R^2}{z_0^2}\right)^{\frac{5}{2}}}; \\ c &= \frac{7}{2} \frac{R^2}{z_0^2} \frac{1 - \frac{5}{2} \frac{R^2}{z_0^2} + \frac{5}{8} \frac{R^4}{z_0^4}}{\left(1 + \frac{R^2}{z_0^2}\right)^{\frac{7}{2}}}; \\ d &= \frac{9}{2} \frac{R^2}{z_0^2} \frac{1 - \frac{21}{4} \frac{R^2}{z_0^2} + \frac{35}{8} \frac{R^4}{z_0^4} - \frac{35}{64} \frac{R^6}{z_0^6}}{\left(1 + \frac{R^2}{z_0^2}\right)^{\frac{9}{2}}}. \end{aligned} \right.$$

Beispielsweise haben mit den Zahlenwerten<sup>1)</sup>

$$(27) \quad \frac{z}{z_0} = \pm \frac{1}{2}; \quad \frac{R}{z_0} = \frac{1}{5},$$

die Glieder der Reihe (23) die Größe

$$a \frac{z^2}{z_0^2} = 0,0139;$$

$$b \frac{z^4}{z_0^4} = 0,00518;$$

1) Sie entsprechen angenähert den äußersten Punkten des Feldes bei der vom Verfasser ausgeführten  $e/m$ -Bestimmung (H. Busch, a. a. O.).

$$c \frac{x_0^6}{x_0^6} = 0,00154 ;$$

$$d \frac{x_0^8}{x_0^8} = 0,00041 .$$

Für die Berechnung der Elektronenbahnen gehen wir aus von den Gleichungen (18a) und (18c), die wir, da das elektrostatische Feld verschwinden soll, mit Benutzung von (22) schreiben:

$$(28a) \quad \ddot{r} = -r \omega^2 h^2(z) \left[ 1 - \frac{r^2}{2} \frac{h''(z)}{h(z)} + \dots \right],$$

$$(28c) \quad \ddot{z} = -r^2 \omega^2 h(z) h'(z) + \dots,$$

worin, analog wie beim homogenen Felde (Gleichung (9)),  $\omega$  eine Abkürzung ist für die Konstante

$$(29) \quad \omega = \frac{\eta \Phi_0}{2} .$$

Wir zeigen zunächst, daß man in (28a, c) die Glieder mit 2. und höheren Potenzen von  $r$  ohne merkliche Einbuße an Genauigkeit vernachlässigen kann. Dazu setzen wir in diesen Gliedern für  $r$  und  $z$  als Näherungen die für homogenes Magnetfeld gültigen Lösungen (10) ein und erhalten, indem wir  $h(z) \approx 1$  setzen, für das Korrektionsglied in (28a):

$$(30) \quad q_1 = -\frac{r^2}{2} \frac{h''(z)}{h(z)} = -\frac{1}{2} r_0^2 \cos^2 \frac{\omega}{w_0} z \cdot h''(z) .$$

Man erkennt durch Differentiation leicht, daß dieser Ausdruck im allgemeinen<sup>1)</sup> ein Maximum für  $z = 0$  hat und daher

$$(30a) \quad q_1 \leq -\frac{r_0^2}{2} h''(0) = \frac{r_0^2}{2} \frac{2a}{x_0^2} = \frac{r_0^2}{x_1^2} \cdot a \frac{x_1^2}{x_0^2}$$

ist ( $z_1$  bedeutet die Koordinate des Brennpunktes).

Bei der Messung kann man aus technischen Gründen mit  $r_0/z_1$  nicht gut über etwa 0,1 hinausgehen<sup>2)</sup>, so daß schon mit den Zahlenwerten (27) das Korrektionsglied kleiner als 0,14%/<sub>00</sub> wird.

1) Falls nämlich  $b \left( \frac{x_1}{x_0} \right)^4 < \frac{\pi^2}{24} a \left( \frac{x_1}{x_0} \right)^2$ .

2) weil sonst schon geringe Abweichungen von der richtigen Justierung in den Faktor  $\cos \alpha$  (vgl. Anm. 3 zu S. 974) eine zu große Unsicherheit bringen würden.



In der gleichen Weise erhalten wir für (28c), indem wir auch hier bei der Bildung von  $h'(z)$  nur das erste Glied der Reihe (23) benutzen<sup>1)</sup>:

$$(31) \quad \ddot{z} = \frac{r_0^2}{\pi_0^2} 2 a w_0 \omega^2 t \cos^2 \omega t$$

und nach Integration:

$$\dot{z} = \frac{r_0^2}{\pi_0^2} \frac{a w_0}{2} (\omega^2 t^2 + \omega t \sin 2 \omega t + \cos^2 \omega t) + \text{const.}$$

Wählt man die Integrationskonstante so, daß für den Ausgangspunkt  $(\omega t \approx -\frac{\pi}{2}) \dot{z} = w_0$  wird, so wird

$$(32) \quad \begin{cases} \dot{z} = w_0 \left[ 1 - \frac{a}{2} \frac{r_0^2}{\pi_0^2} \left( \frac{\pi^2}{4} - \omega^2 t^2 - \omega t \sin 2 \omega t - \cos^2 \omega t \right) \right] \\ = w_0 [1 - q_2]. \end{cases}$$

Das Korrektionsglied  $q_2$  ist im Maximum ( $\omega t = 0$ ) gleich

$$(33) \quad (q_2)_{\max} = \frac{a}{2} \frac{r_0^2}{\pi_0^2} \left( \frac{\pi^2}{4} - 1 \right) = 0,73 \frac{r_0^2}{\pi_1^2} a \frac{\pi_1^2}{\pi_0^2}$$

und mit obigen Zahlenwerten:

$$(q_2)_{\max} \approx 0,1^0/_{00}.$$

Die Gleichungen (28) lassen sich daher mit bei weitem ausreichender Annäherung schreiben:

$$(34a) \quad \ddot{r} = -r \omega^2 h^2(z);$$

$$(34c) \quad \begin{cases} \dot{z} = w_0, \\ z = w_0 t. \end{cases}$$

Durch Elimination von  $t$  erhält man hieraus als Differentialgleichung der Elektronenbahnen:

$$(35) \quad \frac{d^2 r}{dz^2} = r'' = -r \frac{\omega^2}{w_0^2} h^2(z).$$

6. Es handelt sich nun darum, für diese homogene lineare Differentialgleichung, die wir in der Form

$$(35a) \quad r'' + v^2(z) \cdot r = 0$$

schreiben wollen, eine Näherungslösung zu finden.

1) Hier sind die Beiträge der höheren Glieder wegen der nachfolgenden Integration klein gegen den des ersten.

Eine 1. Näherung liefert der Ansatz:

$$(36) \quad r = y(z) \cos \int v dz$$

mit dem die linke Seite von (35a) den Wert annimmt:

$$(37) \quad r'' + v^2 r = -(y v' + 2 v y') \sin \int v dz + y'' \cos \int v dz.$$

Das erste Glied der rechten Seite läßt sich zu Null machen dadurch, daß man für  $y$  setzt:

$$y = \frac{C}{\sqrt{v}}$$

( $C$  ist eine beliebige Konstante).

Der Lösungsansatz geht damit über in

$$(36a) \quad r = \frac{C}{\sqrt{v}} \cos \int v dz$$

und gibt eine Näherungslösung von (35a) in dem Maße, als das auf der rechten Seite von (37) noch verbleibende Glied klein gegen die einzelnen Glieder der linken Seite ist:

$$y'' \cos \int v dz < v^2 r = v^2 y \cos \int v dz$$

oder

$$(38) \quad \frac{y''}{y} = \frac{3}{4} \left( \frac{v'}{v} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{v''}{v} < v^2 = \frac{v''}{r},$$

d. h. als  $v$  eine im Vergleich zu  $r$  sehr langsam veränderliche Größe ist, was hier, wo  $v$ , das ja proportional zu  $h(z)$  ist, innerhalb einer Halbperiode von  $r$  nur um wenige Prozente variiert, im weitgehenden Maße zutrifft.

Weitere Näherungen ergeben sich daraus, daß (36a) nach (37) die strenge Lösung der Gleichung

$$r'' + v^2 r - y'' \cos \int v dz = 0$$

oder

$$(39) \quad r'' + \left[ v^2 + \frac{1}{2} \frac{v''}{v} - \frac{3}{4} \left( \frac{v'}{v} \right)^2 \right] r = r'' + \mu^2 r = 0$$

ist, mit

$$(40) \quad \mu^2 = v^2 + \frac{1}{2} \frac{v''}{v} - \frac{3}{4} \left( \frac{v'}{v} \right)^2.$$

Identifizieren wir also (39) mit (35), indem wir setzen

$$(41) \quad \mu = \frac{\omega}{w_0} h(z),$$

so ist damit die gesuchte Lösung von (35) auf die Lösung der Differentialgleichung (40) nach der Unbekannten  $v(z)$  zurückgeführt. Diese Gleichung läßt sich aber unter der Voraussetzung (38) näherungsweise nach dem Iterationsverfahren lösen; man erhält so unter Vernachlässigung der Quadrate, Potenzen und Produkte der Ableitungen  $v', v''$  usw.:

$$(42) \quad v = \mu - \frac{1}{4} \frac{\mu''}{\mu^2} + \frac{1}{16} \frac{\mu^{(4)}}{\mu^4} - \frac{1}{64} \frac{\mu^{(6)}}{\mu^6} + \dots$$

womit das Problem im Prinzip gelöst ist.

Wegen der Schwierigkeit, den durch die Vernachlässigung der Potenzen und Produkte der Ableitungen begangenen Fehler abzuschätzen, ziehen wir es jedoch vor, statt dieser allgemeinen Lösung eine auf die hier gegebene spezielle Form der Funktion  $\mu(z)$  zugeschnittene Methode zu verwenden; als solche bietet sich, da nach (41) und (23)  $\mu$  als Potenzreihe gegeben ist, die Potenzreihenmethode dar.

Wir setzen dazu (41) in (40) ein und führen zunächst zwecks Fortschaffung des Faktors  $\omega^2/w_0^2$  die neuen Variablen ein:

$$(43) \quad u = \frac{w_0}{\omega} v; \quad \zeta = 2 \frac{\omega}{w_0} z,$$

womit (40) übergeht in

$$u^2 + 2 \frac{u''}{u} - 3 \left( \frac{u'}{u} \right)^2 = h^2$$

oder

$$(44) \quad u^2(u^2 - h^2) + 2u u'' - 3u'^2 = 0.$$

Darin ist  $h$  nach (23) und (43) als Reihe nach Potenzen von  $\zeta$  gegeben, die wir mit der Abkürzung

$$(43a) \quad \zeta_0 = 2 \frac{\omega}{w_0} z_0$$

schreiben:

$$(23a) \quad h(\zeta) = 1 - a \frac{\zeta^2}{\zeta_0^2} - b \frac{\zeta^4}{\zeta_0^4} - c \frac{\zeta^6}{\zeta_0^6} - d \frac{\zeta^8}{\zeta_0^8} - \dots$$

Wir setzen die gesuchte Funktion  $u(\zeta)$  ebenfalls als Potenzreihe an:

$$(45) \quad u(\zeta) = 1 - \alpha \frac{\zeta^2}{\zeta_0^2} - \beta \frac{\zeta^4}{\zeta_0^4} - \gamma \frac{\zeta^6}{\zeta_0^6} - \delta \frac{\zeta^8}{\zeta_0^8} - \varepsilon \frac{\zeta^{10}}{\zeta_0^{10}} - \dots;$$

dann gibt Einsetzen in (44) und Nullsetzen der Koeffizienten der Potenzen von  $\zeta$ :

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= 0; \\ \beta &= \frac{\zeta_0^2}{12} \cdot a; \\ \gamma &= \frac{\zeta_0^4}{30} \left( b - \frac{a^2}{2} - \frac{a}{12} \zeta_0^2 \right); \\ \delta &= \frac{\zeta_0^6}{56} \left( c - a b - \frac{1}{30} [b - 3a^2] \zeta_0^2 + \frac{a}{12 \cdot 30} \zeta_0^4 \right); \\ \epsilon &= \frac{\zeta_0^8}{90} \left( d - a c - \frac{b^2}{2} - \frac{1}{56} \left[ c - \frac{17}{3} a b + \frac{7}{3} a^2 \right] \zeta_0^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{30 \cdot 56} \left[ b - \frac{53}{6} a^2 \right] \zeta_0^4 - \frac{a}{12 \cdot 30 \cdot 56} \zeta_0^6 \right). \end{aligned} \right.$$

Setzt man diese Werte in (45) ein, faßt die Glieder mit  $a \frac{\zeta^2}{\zeta_0^2}$ ,  $b \frac{\zeta^4}{\zeta_0^4}$  usw. bzw. den Produkten dieser Größen zusammen und beachtet, daß der maximale in Frage kommende Wert von  $\zeta$  nach (11) angenähert gleich  $\pi$  ist, so sieht man leicht, daß die Faktoren jener Glieder bzw. ihrer Produkte stets kleiner als 1 sind, die Reihe (45) daher in dem benutzten Bereich sicher konvergiert, falls (23) konvergiert.

Damit ist die Funktion  $u(\zeta)$  und nach (43) auch  $v(z)$  gefunden und dadurch mittels (36a) die Gleichung der Meridiankurve der Elektronenbahnen  $r = r(z)$  ermittelt.

7. Für die  $e/m$ -Bestimmung ist nun nur noch die Berechnung der Brennpunkts- bzw. Ausgangspunktskoordinate, d. h. derjenigen beiden Werte  $\pm z_1$  von  $z$  erforderlich, für die  $r = 0$  wird. Dazu muß in (36a) der  $\cos$  Null, also sein Argument  $= \pm \frac{\pi}{2}$  werden:

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{\pm z_1} v dz &= \frac{\omega}{w_0} \int_0^{\pm z_1} u dz = \pm \frac{\pi}{2} \\ &= \pm \frac{\omega}{w_0} z_1 \left[ 1 - \frac{\alpha}{3} \frac{z_1^2}{z_0^2} - \frac{\beta}{5} \frac{z_1^4}{z_0^4} - \frac{\gamma}{7} \frac{z_1^6}{z_0^6} - \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

Damit ist die gesuchte Beziehung zwischen  $z_1$  und  $\eta$  (das in  $w$  und damit auch in den Koeffizienten  $\alpha, \beta \dots$  steckt), die beim inhomogenen Felde an die Stelle von Gleichung (1) zu treten hat, gefunden. Zwecks Auflösung nach  $\eta$  setzen wir zur Abkürzung

$$(48) \quad \frac{2}{\pi} \frac{\omega}{w_0} z_1 = p,$$

so daß

$$(49) \quad \zeta_0 = p \cdot \pi \frac{x_0}{x_1}$$

wird. Setzen wir dies, sowie die Ausdrücke (46) für die Koeffizienten  $\alpha, \beta \dots$  in (47) ein, so geht sie über in

$$(50) \quad 1 = p[1 - Ap^2 + Bp^4 - Cp^6 + Dp^8 - \dots]$$

mit den Koeffizienten

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{2\pi^3}{5!} \left[ a \frac{x_1^3}{x_0^3} + \frac{2}{7} \left( b - \frac{a^2}{2} \right) \frac{x_1^4}{x_0^4} + \frac{5}{42} (c - ab) \frac{x_1^5}{x_0^5} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{88} \left( d - ac - \frac{b^2}{2} \right) \frac{x_1^6}{x_0^6} + \dots \right]; \\ B &= \frac{2\pi^4}{7!} \left[ a \frac{x_1^3}{x_0^3} + \frac{1}{6} (b - 3a^2) \frac{x_1^4}{x_0^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{22} \left( c - \frac{17}{3} ab + \frac{7}{3} a^3 \right) \frac{x_1^5}{x_0^5} + \dots \right]; \\ C &= \frac{2\pi^6}{9!} \left[ a \frac{x_1^3}{x_0^3} + \frac{6}{55} \left( b - \frac{53}{6} a^2 \right) \frac{x_1^4}{x_0^4} + \dots \right]; \\ D &= \frac{2\pi^8}{11!} \left[ a \frac{x_1^3}{x_0^3} + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

Die Auflösung von (50) nach  $p$  wird sehr vereinfacht dadurch, daß die Koeffizienten  $A, B, C, D$  sehr klein sind; z. B. wird mit den Zahlenwerten (27):

$$A = 0,00257; \quad B = 0,00057; \quad C = 0,000077; \quad D = 0,0000066.$$

Man kann daher in (50) die mit  $A, B \dots$  multiplizierten Potenzen von  $p$  näherungsweise gleich 1 setzen und erhält mit einem Fehler von der Größenordnung  $A^2$  (bei obigem Beispiel weniger als 1/100000):

$$(52) \quad p = \frac{2}{\pi} \frac{\omega}{w_0} z_1 = \frac{\eta \Phi_0 l}{2\pi w_0} = \frac{1}{1 - A + B - C + D - \dots}$$

oder, unter Benutzung von (12):

$$(53) \quad \eta = \frac{2\pi v}{l \Phi} \cos \alpha$$

mit

$$(54) \quad \bar{\Phi} = \Phi_0 (1 - A + B - C + D - \dots) = \Phi_0 \cdot K.$$

Das Endergebnis ist also das, daß bei inhomogenem Magnetfeld sich als Beziehung zwischen  $\eta, v, \Phi$  und  $l$  die gleiche Formel wie beim homogenen Magnetfeld (Gleichung 1) ergibt, falls man für die Feldstärke den durch (54) definierten Mittel-

wert  $\bar{\Phi}$ , d. i. den Maximalwert  $\Phi_0$ , multipliziert mit einem Faktor  $K$ , einsetzt. Dieser Faktor berechnet sich aus (51), bei Vernachlässigung der Glieder mit Potenzen oder Produkten von  $a, b \dots$  (Fehler bei Verwendung der Zahlenwerte (27)

$< \frac{1}{100000}$ ) zu

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} K &= 1 - A + B - C + D - \dots \\ &= 1 - 2! \left( \frac{\pi^3}{5!} - \frac{\pi^4}{7!} + \frac{\pi^5}{9!} - \frac{\pi^6}{11!} + \dots \right) a \frac{x_1^2}{x_0^2} \\ &\quad - 4! \left( \frac{\pi^3}{7!} - \frac{\pi^4}{9!} + \frac{\pi^5}{11!} - \dots \right) b \frac{x_1^4}{x_0^4} \\ &\quad - 6! \left( \frac{\pi^2}{9!} - \frac{\pi^4}{11!} + \dots \right) c \frac{x_1^6}{x_0^6} \\ &\quad - 8! \left( \frac{\pi^2}{11!} - \dots \right) d \frac{x_1^8}{x_0^8} \\ &\quad - \dots \end{aligned} \right.$$

Die Reihen, mit denen die Größen  $a \frac{x_1^2}{x_0^2}, b \frac{x_1^4}{x_0^4}$  usw. multipliziert sind, lassen sich unter Benutzung der Reihe:

$$\frac{\sin \pi}{\pi} = 0 = 1 - \frac{\pi^2}{3!} + \frac{\pi^4}{5!} - \frac{\pi^6}{7!} + \dots$$

leicht zu geschlossenen Ausdrücken summieren; man erhält so schließlich:

$$(55a) \quad \left\{ \begin{aligned} K &= 1 - \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2} \right) a \frac{x_1^2}{x_0^2} - \left( \frac{1}{5} - \frac{4}{\pi^2} + \frac{4!}{\pi^4} \right) b \frac{x_1^4}{x_0^4} \\ &\quad - \left( \frac{1}{7} - \frac{6}{\pi^2} + \frac{6!}{3! \pi^4} - \frac{6!}{\pi^6} \right) c \frac{x_1^6}{x_0^6} \\ &\quad - \left( \frac{1}{9} - \frac{8}{\pi^2} + \frac{8!}{5! \pi^4} - \frac{8!}{3! \pi^6} + \frac{8!}{\pi^8} \right) d \frac{x_1^8}{x_0^8} - \dots \end{aligned} \right.$$

oder

$$(55b) \quad \left\{ \begin{aligned} K &= 1 - 0,1307 a \frac{x_1^2}{x_0^2} - 0,0411 b \frac{x_1^4}{x_0^4} - 0,0179 c \frac{x_1^6}{x_0^6} \\ &\quad - 0,0095 d \frac{x_1^8}{x_0^8} - \dots \end{aligned} \right.$$

Zu genau denselben Formeln gelangt man übrigens auch, wenn man in (47) für  $\nu$  an Stelle der Reihe (45) die nach dem Iterationsverfahren gewonnene Näherungsgleichung (42) einsetzt.

Wir haben so für  $K$  eine Reihe gefunden, die sehr schnell konvergiert, denn sie entsteht aus der Reihe (23) durch Multiplikation von deren Gliedern mit Faktoren, die nicht nur

klein gegen 1 sind, sondern auch, wie man am besten aus der Form (55) erkennt, mit wachsender Gliednummer dauernd abnehmen. Man kommt deshalb praktisch mit ganz wenigen Gliedern aus; z. B. geben die Zahlenwerte (27)

$$K = 1 - 0,001816 - 0,000213 - 0,000036 - 0,000004,$$

so daß hier schon das erste Glied nach der Eins  $K$  auf etwa  $0,25\%$  genau gibt und Hinzunahme des nächsten Gliedes den Fehler auf  $0,04\%$  herabdrückt.

Die Kleinheit der Faktoren, mit denen in der Formel für  $K$  die Größen  $a \frac{x_1^2}{x_0^2}$  usw. multipliziert sind, ist wichtig für die Beurteilung der Genauigkeit der in Rede stehenden Methode zur  $e/m$ -Bestimmung, weil danach die Inhomogenität des Feldes auf das Endresultat nur einen verhältnismäßig kleinen Einfluß hat und deshalb nicht sehr genau bekannt zu sein braucht. Für die Demonstration der Methode vor einem größeren Kreise hat das den Vorteil, daß man im Interesse der Sichtbarkeit des Fluoreszenzschirmes mit einer relativ kurzen und weiten Spule auskommt; beispielsweise erhält man mit  $\frac{R}{x_0} = \frac{1}{4}$ ,  $\frac{x_1}{x_0} = \frac{2}{3}$ , wo die Feldstärke in dem benutzten Bereich schon etwa 8 Proz. von ihrem Maximalwerte  $\mathfrak{H}_0$  abweicht:

$$K = 1 - 0,0048 - 0,0009 - 0,0002,$$

begeht also, wenn man statt  $\bar{\mathfrak{H}}$  einfach  $\mathfrak{H}_0$  setzt, nur einen Fehler von etwa 0,6 Proz.

8. Überblicken wir noch einmal die Ableitung der Formeln auf die dabei begangenen Vernachlässigungen hin, so ist zusammenfassend zu sagen, daß die dadurch bewirkten Fehler des Endresultats bei einer den Zahlenwerten (27) entsprechenden Spule von der Größenordnung einiger Hundertstel Promille sind bis auf die von der endlichen Öffnung des Bündels herrührenden, die nach Gleichung (30a) und (33) einige Zehntel Promille betragen können. Wenn nun auch bei dem derzeitigen Stande der Technik der Meßmethode diese Fehler wesentlich kleiner als die zu erwartenden Meßfehler sind, so sei doch im Hinblick auf die Möglichkeit einer Verfeinerung der Meßtechnik gezeigt, wie dieser letztere Fehler in Rechnung gesetzt werden kann.

Der Weg ist der gleiche, wie in § 5 bei der Abschätzung des Fehlers eingeschlagen: man setzt in den Gleichungen (28a) und (28c) in den  $r^2$  enthaltenden Korrektionsgliedern für  $r$  die Näherungslösung  $r = r_0 \cos \frac{\omega}{w_0} z$ ; (28c) enthält dann auf der rechten Seite eine Funktion nur von  $z$  und liefert durch Integration in bekannter Weise  $z^2$ . Dann läßt sich aus (28a) und (28c) mittels der Formel:

$$\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dz^2} \dot{z}^2 + \frac{dr}{dz} \ddot{z}$$

die Zeit eliminieren und man erhält so für  $r(z)$  eine Differentialgleichung von der Form (35), nur mit dem Unterschied, daß an die Stelle der Funktion  $h(z)$  die Funktion

$$(56) \quad \begin{cases} H(z) = h(z) \\ + \frac{r_0^2}{2} \left[ \frac{\omega^2}{w_0^2} (h(z) - h(z_1)) + \frac{\omega}{w_0} \sin 2 \frac{\omega}{w_0} z \cdot h'(z) + \dots \right] \end{cases}$$

tritt. Man hat dementsprechend in den Entwicklungen der §§ 6 und 7 nur  $h$  durch  $H$  zu ersetzen und erhält so nach etwas langwieriger, aber nicht weiter schwieriger Rechnung schließlich an Stelle des Faktors  $K$  einen neuen Wert  $K'$  von der Form:

$$(57) \quad K' = K + \frac{r_0^2}{z_1^2} \left( A_1 a \frac{z_1^2}{z_0^2} + B_1 b \frac{z_1^4}{z_0^4} + \dots \right).$$

Wir begnügen uns mit der Angabe des Koeffizienten des ersten, offenbar weitaus größten der hinzukommenden Glieder<sup>1)</sup>:

$$(58) \quad A_1 = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{8} = +0,6975 \approx 0,7.$$

Mit den Zahlenwerten (27) und  $\frac{r_0}{z_1} = 0,1$  ist also die hinzukommende Korrektur

$$0,7 \cdot 0,1^2 \cdot 0,0139 \approx 0,0001.$$

Der bei der Vernachlässigung der höheren Potenzen von  $r$  begangene Fehler ist also noch wesentlich geringer als die Abschätzung (Gleichung 30a und 33), die ja nur eine obere Grenze lieferte, ergab; er kann nach (57) und (58) bis auf einige Hundertstel Promille korrigiert werden, so daß damit

1) Dementsprechend sind in Gleichung (56) die Glieder, die  $a$  nicht enthalten, von vornherein weggelassen und nur durch ... angedeutet worden.



die Endformel (57) in Verbindung mit (53), (54) und (55) unter Berücksichtigung aller Fehler bei den zugrunde gelegten Zahlenwerten als auf einige Hundertstel Promille genau angesehen werden kann.

#### Zusammenfassung

1. Es wurden die Bewegungsgleichungen eines Elektrons im axialsymmetrischen, im übrigen aber beliebig inhomogenen magnetischen und elektrostatischen Felde abgeleitet (Gleichungen 7a bis 7c).

2. Es wurde der Satz bewiesen, daß in einem derartigen Felde ein von einem Punkte der Symmetrieachse parallel zu ihr ausgehendes, genügend enges Kathodenstrahlbündel stets wieder in einem Punkte (Brennpunkte) vereinigt wird.

3. Für ein angenähert homogenes, in Form einer Potenzreihe gegebenes Magnetfeld wurden durch Integration der Bewegungsgleichungen nach einem Näherungsverfahren die Bahnkurven der Elektronen ermittelt (Gleichungen 36a, 43, 45, 46) und daraus

4. im Hinblick auf die vom Verfasser angegebene Methode der  $e/m$ -Bestimmung der Abstand zwischen Ursprung und Brennpunkt des Bündels mit einer Genauigkeit von einigen Hundertstel Promille berechnet.

Jena, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 18. Oktober 1926.)

## 7. *Magnetische Ablenkung der Spektrallinien; von W. Wien*

(Hierzu Tafel X)

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> hatte ich gezeigt, daß die geladenen Träger der Spektrallinien in einem elektrischen Felde im hohen Vakuum, in welchem keine merklichen Umladungen mehr stattfinden, so abgelenkt werden, daß man auf einem mit spaltlosem Spektrographen aufgenommenen Spektrogramm feststellen kann, welche Linien von geladenen und welche von ungeladenen Teilchen ausgesandt werden. Die Anordnung war im wesentlichen dieselbe, wie ich sie bei den Messungen der Abklingung verwandt hatte. Ein Kanalstrahl geht aus der Entladungsröhre durch einen engen Spalt von geringer Tiefe in das hohe Vakuum, wo keine in Betracht kommende Zahl von Zusammenstößen mehr stattfinden kann. Die vorher bei höherem Druck zum Leuchten erregten Teilchen klingen im hohen Vakuum nach dem Exponentialgesetz ab und sind daher auf ihrem Wege nur auf einer Strecke sichtbar, deren Länge von der Geschwindigkeit abhängt.

Für die elektrische Ablenkung gehen nun die Strahlen durch einen kleinen Kondensator von 2 mm Länge, dessen Entfernung vom Austrittsspalt der Kanalstrahlen  $\frac{1}{2}$  mm beträgt, so daß die Lichtaussendung der bewegten Kanalstrahlteilchen auch hinter dem Kondensator noch beträchtlich ist.

Auf diese Weise hat sich nachweisen lassen, daß die Linien der Balmerserie, die Quecksilberlinien und die sogenannten Bogenlinien der Sauerstoffs und Stickstoffs von ungeladenen Teilchen, die sogenannten Funkenlinien der letztgenannten Gase von geladenen ausgesandt werden.

Zweifelhaft bleibt bei dieser Beobachtung, ob die abgelenkten Spektrallinien von einfach oder mehrfach geladenen

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 69. S. 325. 1922.

Teilchen herrühren. Wenn man die Natur der Träger der Lichtemission vollständig bestimmen will, so muß die spezifische Ladung gemessen werden, die bekanntlich die Ausföhrung der Messung der elektrischen und der magnetischen Ablenkung erfordert. Aus diesem Grunde habe ich außer der elektrischen Ablenkung mit einer besonderen Anordnung auch die magnetische beobachtet.

Die magnetische Ablenkung der Spektrallinien ist schwieriger zu erhalten als die elektrische. Für die letztere ist nur ein genügend kurzer Kondensator erforderlich, der, möglichst nahe am Austrittsspalt der Kanalstrahlen angebracht, die geladenen Teilchen ablenkt, bevor die Lichtaussendung aufgehört hat.

Bei der magnetischen Ablenkung dagegen wird der Strahl senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien abgelenkt. Es kann also der Magnet nicht einfach so aufgestellt werden, daß die Kraftlinien senkrecht zum Strahl und zur Beobachtungsrichtung laufen, weil dann die Ablenkung in der letzteren erfolgen würde.

Zunächst wurden Versuche in der Weise angestellt, daß ein kleiner Spiegel unmittelbar am austretenden Kanalstrahl unter  $45^\circ$  angebracht war, der den Strahl in die Beobachtungsrichtung warf. Die Anordnung erwies sich jedoch als zu lichtschwach.

Es wurde nun dazu geschritten, den einen Magnetpol für die Beobachtung zu durchbohren. Um nicht zu viel Licht zu verlieren, mußte der der Magnetpol möglichst kurz sein und es wurde daher ein Hufeisenelektromagnet gewählt und auf seine Enden Eisenpole von 15 cm Länge und 8 cm Breite und Höhe gesetzt. Die Pole waren abgeschrägt, so daß eine kreisförmige Polfläche von 4 cm Durchmesser übrig blieb. Der Abstand der beiden Polflächen war 16 mm. Der eine Magnetpol war konisch durchbohrt, indem die Öffnung in der Polfläche 1 cm, am anderen Ende des Polstückes 3 cm Durchmesser hatte. Auf diese Weise wurde ohne erhebliche Schwächung des Magnetfeldes erreicht, daß die Öffnung des von dem Kanalstrahl ausgesandten Lichtbündels die Kollimatorlinse ausfüllte.

Da der aus dem engen Spalt in das hohe Vakuum austretende Kanalstrahl selbst als optischer Spalt diente, so mußte

er sich im Brennpunkt der Kollimatorlinse befinden. Diese Anordnung war getroffen, so lange ein Quarzspektrograph mit einem Prisma, der für meine Messungen der Abklingung verwendet worden war, benutzt wurde. Das Kollimatorrohr war so kurz abgeschnitten, daß es zur Justierung nahe an den durchbohrten Magnetpol herangeschoben werden konnte. Die Dispersion dieses Spektrographen war indessen für die Trennung der Stickstofflinien und Banden zu klein und an seiner Stelle wurde daher ein großer Triplett spektrograph mit drei großen Steinheilschen Flintprismen verwendet. Bei diesem erwies es sich als zweckmäßiger, den Kanalstrahl durch den durchbohrten Magnetpol hindurch mit Hilfe einer sehr lichtstarken achromatischen Linse auf die Brennebene des Spektrographenobjektivs abzubilden (Fig. 1).

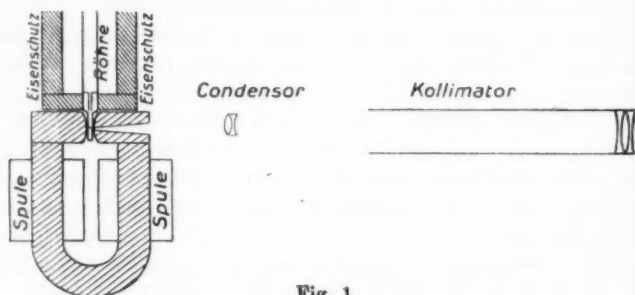


Fig. 1

In der Figur sieht man die Anordnung des Apparats. Um die Kanalstrahlenröhre ist ein Eisenschutz gelegt, damit die Entladung nicht zu sehr durch die magnetischen Kräfte beeinflusst wurde. Die durchbohrte Kathode ist aus Eisen mit einem Aluminiumblech nach der Entladungsseite. Die Kanalstrahlen fallen auf ein Messingblech von 1 mm Stärke, in das ein Spalt von 2,5 mm Länge und 0,2 mm Breite geschnitten ist.

Wie bei meinen früheren Versuchen kann man die Kanalstrahlen durch diesen Spalt in ein hohes Vakuum treten lassen, das durch die Wirkung einer Gaedeschen Stahldiffusionspumpe aufrecht gehalten wird.

Da das magnetische Feld trotz dem Eisenschutz etwas auf die Kathodenstrahlen einwirkt und diese an die Seitenwand

der Kanalstrahlenröhre lenkt, so wurde ein Porzellanrohr benutzt, das die von den auftreffenden Kathodenstrahlen hervorgerufene Erhitzung verträgt, ohne zu zerspringen.

Die Aufnahmen ergeben dieselben magnetischen Ablenkungen, wie sie sich bei der elektrischen gezeigt hatten.

Bekanntlich ist die magnetische Ablenkung

$$y_m = A \frac{e}{m v},$$

die elektrische

$$y_e = B \frac{e}{m v^2}.$$

Hier sind  $A$  und  $B$  Konstanten, die von den Abmessungen und der Stärke der Felder abhängen,  $e/m$  ist die spezifische Ladung,  $v$  die Geschwindigkeit der Kanalstrahlteilchen.

Setzen wir die spezifische Ladung  $\frac{e}{m} = s$ , so ist für zwei verschiedene Teilchenarten

$$y'_m = A \frac{s'}{v'} \quad \text{und} \quad y''_m = A \frac{s''}{v''},$$

woraus sich

$$\frac{y'_m}{y''_m} = \frac{s' v''}{v' s''}$$

ergibt und ebenso

$$\frac{y'_e}{y''_e} = \frac{s' v''^2}{v'^2 s''}.$$

Quadrieren wir die erste Gleichung und dividieren sie durch die zweite, so erhalten wir

$$\frac{y'^2_m y'_e}{y''^2_m y''_e} = \frac{s'}{s''}, \quad \frac{v'}{v''} = \frac{s'}{s''} \frac{y''_m}{y'_m}.$$

Wenn für zwei Spektrallinien sowohl die elektrische wie die magnetische Ablenkung dieselbe ist, also wenn  $y'_m = y''_m$ ,  $y'_e = y''_e$  sind, dann ist auch  $s' = s''$  und  $v' = v''$ .

Dies ist nun für die Funkenlinien des Sauerstoffs und des Stickstoffs und für die verschiedenen negativen Banden des Stickstoffs der Fall, so daß wir annehmen können, daß diese jeweils von denselben Trägern ausgesandt werden.

Dagegen war die elektrische Ablenkung für die Banden größer als für die Funkenlinien. Ein Vergleich beider schien daher von Interesse zu sein.

Die Ausmessung der Ablenkung einer Linie stößt auf

Schwierigkeiten, weil sie entsprechend der bekannten ungleichmäßigen Ablenkung der Kanalstrahlen, die eine Folge der verschiedenen Geschwindigkeiten ist, ebenfalls ungleichmäßig erfolgt. Man muß deshalb die maximalen Ablenkungen wählen. Die Ausmessung zeigte, daß die magnetischen Ablenkungen der Banden und Funkenlinien des Stickstoffs annähernd gleich groß waren, während die elektrische Ablenkung der Banden ungefähr das Doppelte der der Linien betrug.

Beziehen wir  $s'$  auf die Linien,  $s''$  auf die Banden, so ist

$$y'_m = y''_m, \quad y''_e = 2y'_e.$$

Hieraus folgt

$$s' = 2s'', \quad v' = 2v''.$$

Wenn die Linien von den Atomen, die Banden von den Molekülen ausgesandt werden, so ist  $2m' = m''$  und aus  $s' = 2s''$  folgt  $e' = e''$ , so daß, wenn die Linien vom einfach geladenen Atom ausgesandt werden, die Banden vom einfach geladenen Molekül ausgehen.

Das Ergebnis  $v' = 2v''$  stimmt jedoch nicht mit den Ergebnissen von Rau<sup>1)</sup> überein, der  $v' = \sqrt{2}v''$  findet, liegt vielmehr in der Richtung der Beobachtung von v. Dechend<sup>2)</sup>, der beobachtete, daß Moleküle unter Umständen von einer geringeren Spannung beschleunigt werden als die Atome.

Wie bei der elektrischen Ablenkung ist die magnetische Ablenkung der Funkenlinie des Stickstoffs weniger deutlich auf der photographischen Platte zu sehen, wie die der Funkenbanden. Auf allen Platten tritt die Ablenkung der starken Bande 428 besonders deutlich hervor.

Fig. 2, Taf. X, zeigt die magnetische Ablenkung. Abgelenkt erscheinen hier die Linien 443; 453 und die Banden 427,8; 470,5.

Hr. Werkmeister Knöllinger hat auch bei dieser Untersuchung in dankenswerter Weise mitgewirkt.

München, Physik. Institut der Univ., Oktober 1926.

1) H. Rau, *Ann. d. Phys.* 73. S. 269. 1924.

2) H. v. Dechend u. W. Hammer, *Verh. d. D. Phys. Ges.* 1911, S. 203.

(Eingegangen 19. Oktober 1926)

## 8. *Kathodenzerstäubungsprobleme.*

(II. Mitteilung)

### *Die Kathodenzerstäubung in Abhängigkeit von den Betriebsbedingungen; von Erich Blechschmidt*

(Jenaer Dissertation)

(Hierzu Tafel XI)

#### 1. Zweck und Anlage der Arbeit

Die kathodische Zerstäubung von Metallelektroden im Glimmstrom ist von einer großen Anzahl von Arbeiten untersucht worden, deren Ergebnisse erstmalig von V. Kohlschütter (1) zusammengefaßt wurden, und die, abgesehen von den in den letzten Monaten erschienenen Arbeiten von Güntherschulze (2), keine wesentliche Ergänzung oder Berichtigung erfahren haben. Diese letztgenannten Untersuchungen erschienen erst bei Abschluß dieser Versuche. Sie sind im folgenden an den einschlägigen Stellen kurz erwähnt, ausführlicher wird in der anschließenden Arbeit von A. v. Hippel zu ihnen Stellung genommen. Aus den älteren Messungen läßt sich aus zwei Gründen kein klares Bild von den inneren Zusammenhängen gewinnen: einmal war ein großer Teil der Untersuchungen infolge unzureichender Apparaturen und undefinierter Betriebsverhältnisse — beide Mängel waren zumeist begründet durch den damaligen Stand der Forschungsmöglichkeiten — nicht in der Lage, vollkommen einwandfreie Resultate zu liefern; andererseits wurden stets nur einige Punkte beachtet, während andere für den Zerstäubungsvorgang gleichwichtige Parameter in ihrer Bedeutung nicht erkannt und daher nicht beobachtet wurden, und so konnte kein Resultat mit Sicherheit an das andere anschließen.

Aufgabe dieser Arbeit war es, unbeeinflusst durch irgendwelche theoretische Vorstellungen, die Kathodenzerstäubung in

Abhängigkeit von möglichst allen Betriebsbedingungen experimentell zu untersuchen, und so eine einwandfreie Grundlage für die Klärung der physikalischen Vorgänge zu schaffen. Unter Betriebsbedingungen im weitesten Sinne sind dabei zu verstehen: 1. Die tatsächlichen Betriebsbedingungen: Spannung, Stromstärke und Gasdruck. 2. Die sich damit zwangsläufig einstellenden Sekundärfaktoren: Lage und Größe des Kathodendunkelraumes und die Temperatur der Elektroden und des Gasraumes. 3. Die geometrischen Daten der Zerstäubungsanordnung: Form des Zerstäubungsraumes, Gestalt, Größe und Abstand der Elektroden, Lage der Auffangplatten. 4. Gas und Kathodenmaterial.

Zur quantitativen Verfolgung der Zerstäubungsvorgänge hat man zwei Möglichkeiten: 1. Die Feststellung des Gewichtsverlustes der Kathode; 2. die Messung der von der Kathode emittierten Teilchen an definierter Stelle im Zerstäubungsraum. Die erste Methode hat folgende Nachteile: Auf der Kathode bedingen zunächst vorhandene Oxydschichten und sonstige Verunreinigungen einen Zerstäubungsverzug, so daß man nicht in der Lage ist, den Anlaufvorgang von der regulären Zerstäubung zu trennen; bei Beobachtung des Zerstäubungsniederschlages kann dieser Fehler durch zeitweises Abdecken der Auffangplatten vermieden werden. Außerdem wurde festgestellt, daß ein Teil des zerstäubten Metalls zur Kathode zurückkehrt (1) u. (3). Darum wurde in vorliegender Arbeit die zweite Methode gewählt, obwohl der Nachteil in Kauf genommen werden mußte, daß die aufgefangene Menge des zerstäubten Materials nur einen Teil der von der Kathode abgestoßenen Zerstäubungspartikel darstellt. Auch sind hier Einzeluntersuchungen in größerer Anzahl erforderlich, die über die Ausbreitung der Zerstäubungsprodukte und eine Reihe von Erscheinungen in der Ausbreitungsbahn Aufschluß geben können.

Die in einem bestimmten Abstand von der Kathode pro Zeit- und Flächeneinheit aufgefangene Menge des zerstäubten Materials wurde mit einer Sartoriuswage von 20 g Maximalbelastung bei einer Meßgenauigkeit von 0,02 mg festgestellt. (Es sei hier darauf hingewiesen, daß bei dieser Wage infolge hoher Empfindlichkeit gegen elektrostatische Aufladungen durch den zu wägenden Gegenstand besondere Vorsichtsmaßnahmen erforderlich sind.)



Die niedergeschlagene Zerstäubungsmenge wird künftig als Beschlagsintensität  $I_a$  bezeichnet. Sie wurde auf Schichtdicken umgerechnet und in  $\mu\mu$  ausgedrückt unter der Annahme einer gleichmäßigen Verteilung des zerstäubten Materials über die ganze gegenüber den Elektroden kleine Auffangplatte; die Zulässigkeit dieser Annahme wurde mit einem Stufenphotometer nach Pulfrich<sup>1)</sup> in weiten Grenzen bestätigt. Außerdem wurde das spezifische Gewicht des zerstäubten Materials dem normalen Werte gleichgesetzt.

Um die eigentlichen Ursachen der Zerstäubung unbeeinflusst von Nebenerscheinungen beobachten und eine entsprechende Versuchsanordnung entwickeln zu können, war die Untersuchung der geometrischen und sekundären Einflüsse vorwegzunehmen.

## 2. Die Abhängigkeit von den geometrischen Daten der Versuchsanordnung

### a) Die bisherigen Kenntnisse

Systematische Messungen über die Abhängigkeit der Zerstäubungsvorgänge von den *geometrischen Daten der Versuchsanordnung* liegen bisher nicht vor. Man ist hier lediglich angewiesen auf einige zufällige Beobachtungen in einer Reihe von älteren Arbeiten. Aus ihnen läßt sich ganz allgemein erkennen, daß der Abstand der Gefäßwände für die Ausbildung der Glimmentladung (Dunkelraumdicke, Gasdruck usw.) und damit für die erzielten Zerstäubungswerte von Bedeutung ist (1), (4), (5). Zum Teil kann diese Abhängigkeit offenbar auf Wandaufladungen zurückgeführt werden (6), (7). Einen entsprechenden Einfluß übt auch die Flächengröße und Form der Elektroden aus (1), (6), (7), (8), (9). Auch scheint sekundär die Lage der Auffangplatten zum Dunkelraum für die Niederschlagsbildung wesentlich zu sein (10), (11). Die Beobachtungen stehen teilweise in Widerspruch zueinander; es ist das auf den eingangs bereits erwähnten Umstand zurückzuführen, daß einer Anzahl von Parametern der Glimmentladung nicht die ihnen für die Zerstäubung zukommende Bedeutung beigegeben wurde.

1) Hrn. Prof. Pulfrich sei für das freundlichst zur Verfügung gestellte Photometer auch an dieser Stelle bester Dank ausgesprochen.

## b) Die Versuchsanordnung

Für die Apparatur war großer Abstand der Gefäßwandungen erwünscht und selbstverständlich Vermeidung jeder Verunreinigung des Zerstäubungsraumes durch Fremdgase und Dämpfe. Für die folgenden Versuche wurde darum als Zerstäubungsgefäß eine Anordnung verwendet, die der von Rümelin (12) beschriebenen

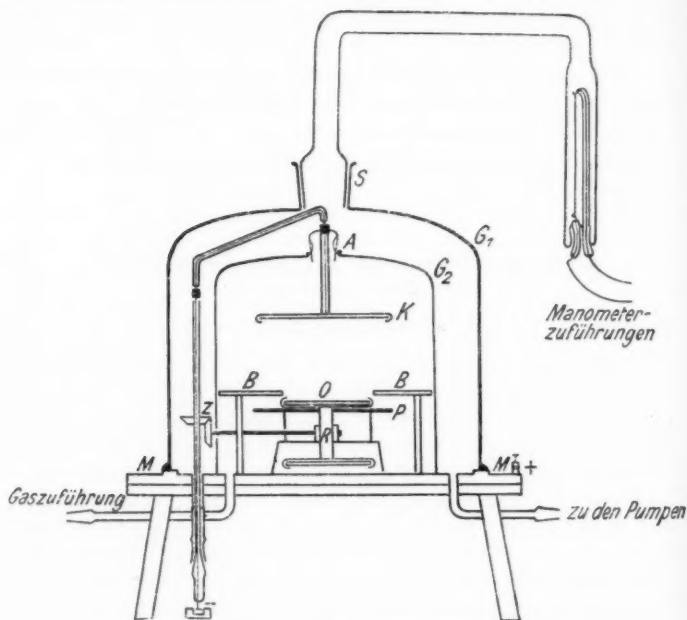


Fig. 1. Zerstäubungsgefäß für die Voruntersuchungen

ähnlich war. Auf eine Messingplatte *M* aufgeschliffen und mit Ramseyfett gedichtet, saß eine Glasglocke *G* 1, mit oberem Schliff *S* versehen für einen Manometeranschluß (Fig. 1). In ihr befand sich eine zweite Glocke *G* 2 zum Abhalten von Fettämpfen usw., in der sich der eigentliche Zerstäubungsprozeß abspielte. Sämtliche Zuführungen erfolgten durch die Grundplatte hindurch mittels Messingrohren, die zur Verbindung mit den übrigen Apparaturteilen mit Schliffansätzen versehen waren. In die innere Glocke führte lediglich die Gaszuleitung,

Abströmen konnte das Gas durch einen Aufsatz *A* auf der oberen Glockenöffnung, der gleichzeitig die Kathode *K* zu tragen hatte. Diese hatte für alle Messungen eine Größe von 12 cm Durchmesser und war einseitig mit Tempaxglas (Schott u. Gen., Jena) oder Hartporzellan (Berliner Porzellanmanufaktur) abgedeckt, um eine rückwärtige Zerstäubung zu verhindern. Alle Stromzuführungen zur Kathode waren verglast. Als Anode diente die Grundplatte, auf der die Vorrichtungen zum Tragen der Auffangplatte aufgestellt waren.

Für eine Reihe von Messungen war die Herstellung mehrerer Schichten kurz hintereinander ohne Öffnung der Apparatur er-

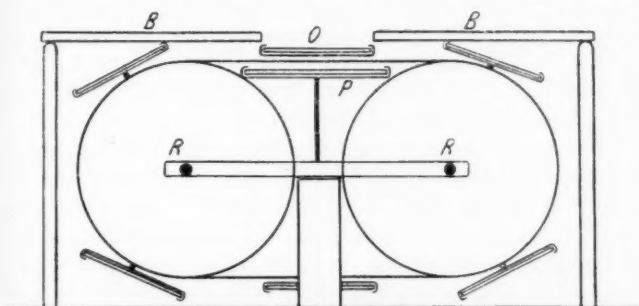


Fig. 2. Drehanordnung für Mehrfachbestäubung

forderlich. Zu diesem Zweck wurde eine *Drehvorrichtung* mit Haltern für 6 Auffangplatten konstruiert. Auf ein Stahlband wurden in regelmäßigen Abständen 6 Metalldrähte von der Länge eines Objektträgers gelötet, mit Fassungen an den Enden zum Einschieben der als Auffangplatten verwendeten Objektträger *O* (Fig. 1 und 2). Das Band lief über zwei Messingräder *R*, deren eine Achse von einem Schliff mittels Kegelzahnradübersetzung *Z* von außen gedreht werden konnte. Das ganze war gegen die Kathode durch eine Blende *B* vom Querschnitt der inneren Glocke abgedeckt mit Ausnahme eines Ausschnittes *O* von der Größe einer Auffangplatte. Die zu bestäubende Platte mußte unter diese Öffnung gedreht werden. Ein Eindringen von Zerstäubungsteilchen in diesen Mechanismus wurde durch eine zweite Glasplatte *P* dicht unterhalb des zu bestäubenden Objektträgers verhindert. Auf diese Weise war gleichzeitig die Möglichkeit gegeben, ein Exponieren der Platten für die Dauer

des Anlaufvorganges zu vermeiden. — Dem gleichen Zweck diente, soweit die hier beschriebene Anordnung nicht verwendet wurde, eine an einer Magnetnadel befestigte Glimmerscheibe, die von einem Elektromagneten außerhalb der Versuchsanordnung in der gewünschten Lage gehalten werden konnte. Beim Abschalten des Magneten stellte sich die Nadel in das Erdfeld ein und gab damit die Auffangplatte frei. Eine Verzerrung des Glimmlichts fand durch die Magnetnadel dann in keiner Weise statt.

Als Pumpenaggregat dienten Quecksilberdampfstrahl- und Diffusionspumpe mit rotierender Ölpumpe als Vorvakuum. Die Spannung wurde einer Gleichstrommaschine mit 5000 Volt, 100 m/A Maximalbelastung entnommen. Als Meßinstrumente standen ein Gleichstromvoltmeter von Hartmann und Braun bis 5000 Volt und ein Milliampereometer von Siemens und Halske bis 150 mA zur Verfügung.

Zur Druckmessung wurden ein Mc.Leod (bis  $10^{-4}$  mm) und ein Manometer nach Reden (bis  $10^{-3}$  mm) und zur fortlaufenden Druckbeobachtung ein Widerstandsmanometer verwendet.

*Gaszuführung und Gasreinigung.* Die Gaszuführung erfolgte nach einigen Versuchen mit stoßweisem Einlassen des zwischen zwei Hähnen abgeschlossenen Gases nach der Durchströmungsmethode. Es wurde hierzu eine Kapillare benutzt, die mit einem Vorratsgefäß mit Manometer zur Regulierung des Vordruckes und damit der Durchströmungsgeschwindigkeit verbunden war. Für Wasserstoff kam auch ein Palladiumrohr (Phönix-Rudolstadt) zur Anwendung, wobei die Durchströmungsgeschwindigkeit durch verschiedene Heizung des Palladiums reguliert wurde, jedoch reichte die Diffusionsgeschwindigkeit zur Aufrechterhaltung hoher Drucke nicht aus.

An Gasen wurden Wasserstoff, Argon und Stickstoff verwendet. Die Erzeugung von Wasserstoff erfolgte nach dem von Niese (13) ausgebauten Gaedischen Prinzip (14), das spektral reinen Wasserstoff liefern sollte. Verbessert wurde die Anordnung durch dauernde Aufrechterhaltung der Polarisierung. Nach späteren Beobachtungen sollten im Wasserstoff trotzdem noch Spuren von Verunreinigungen enthalten sein. Er wurde deshalb außerdem durch gesättigte Kaliumpermanganatlösung zur Absorption von Arsen-, Schwefel-, Kohlen- und Phosphorwasserstoff geleitet, und darauf in Chlorkalium getrocknet. Über

glühenden Kupferspänen wurden vorhandene Sauerstoffreste beseitigt und schließlich Spuren von Feuchtigkeit beim Streichen über Phosphorpentoxyd entfernt.

Argon wurde in Bomben von der Linde-Eismaschinen-Gesellschaft, Höllriegelsgreuth, mit 98,8 Proz. Reinheitsgrad geliefert, während Stickstoff ebenfalls als Bombenstickstoff von der Firma C. Zeiss zur Verfügung gestellt wurde.

Soweit im folgenden nichts besonderes bemerkt ist, wurden die Beobachtungen an Silber in Wasserstoff vorgenommen.

### e) Reproduzierbarkeit der Schichten

Zur Beurteilung von Meßergebnissen mußte zuvor festgestellt werden, inwieweit die Schichten reproduzierbar waren. Die Beobachtung hatte sich zu erstrecken auf 1. Einflüsse durch Art und Vorbehandlung der Auffangplatte. 2. Abhängigkeit von der Gaszusammensetzung. 3. Abhängigkeit von der Bestäubungsdauer. 4. Die Konstanz der Betriebsbedingungen.

Zur Auswertung konnten nur einwandfreie Schichten herangezogen werden, deren Güte zum Teil von der Art der Unterlage und ihrer Vorbehandlung abhängt. Es wurden Objektträger von 76·26 mm Größe aus stets dem gleichen Spiegelglas (C. Zeiss, Jena) verwendet. Zur Reinigung wurde eine Reihe auch in der Zerstäubungsliteratur (15—20) erwähnter Methoden geprüft, von denen die folgende als bequemste und zugleich beste verwandt wurde: Kochen in Chromschwefelsäure, Abspülen in destilliertem Wasser, Trocknen mit einem Leinentuch und event. Abziehen mit Kollodium. Bei Benutzung einiger anderer Reinigungsverfahren, z. B. von Natronlauge, ließen sich keine guten Schichten erzielen. Auch waren einige optische handpolierte Gläser, wohl infolge ihrer Bearbeitung, zur Herstellung einwandfreier Schichten nicht brauchbar, eine Beobachtung, die auch bei der Firma C. Zeiss gemacht wurde.

Geringe Verunreinigungen des Versuchsgases (besonders mit Sauerstoff) verursachten nach Beobachtungen von Kohlschütter eine erhebliche Beeinflussung der Zerstäubungsintensität. Zur Vermeidung solcher Fehler wurden, wie oben erwähnt, die Schichten bei dauernd strömendem Gas hergestellt; zuvor wurde die Anordnung bis unter  $10^{-4}$  mm Druck (Meßgrenze des Mc.Leod) evakuiert und mehrmals mit dem Versuchsgas durchspült.

Zur Beurteilung der Vergleichbarkeit von Schichten war zunächst die Beobachtung der Abhängigkeit der Beschlagsintensität  $I_a$  von der Zerstäubungsdauer  $t$  erforderlich, die zu folgendem Ergebnis führte:

1. Die Beschlagsintensität in Abhängigkeit von der Zerstäubungsdauer [ $I_a = f(t)$ ] zeigt einen linearen Verlauf mit der Zeit  $t$ , wenn man von einer Anlaufzeit  $t_1$  absieht, deren Größe für die einzelnen Metalle und Versuchsgase verschieden ist.

Die Anlaufzeit war am geringsten bei den Edelmetallen, wie Silber, Platin, Gold, und erreichte Maximalwerte für die unedlen Metalle, wie Kadmium, Zink u. a., wenn man von den Leichtmetallen Aluminium und Magnesium absieht. Diese Erscheinung ist offenbar auf Verunreinigungen und Oxydschichten zurückzuführen: Die Anlaufzeit stieg an bei verunreinigten Metallen, ebenso wenn die Kathoden durch längere Berührung mit der atmosphärischen Luft oxydiert waren. Eine Reihe von schlecht zerstäubenden Metallen zeigte außerdem über ihre ganze Fläche hin Fluoreszenz. Nach älteren Angaben von Stark (21) war das eine Folge von Metallverbindungen. Bezeichnend hierfür war die Tatsache, daß bei einigen dieser Metalle mit dem Verschwinden der Fluoreszenz gleichzeitig die normale Zerstäubung einsetzte (Kadmium). Daß die Fluoreszenz tatsächlich eine Folge von Verunreinigungen war, ging daraus hervor, daß sie bei fast allen Metallen auftrat, wenn (unter besonderen Verhältnissen, vgl. unten S. 1011) eine Funkenbildung auf der Kathode auftrat. Die betreffende Stelle leuchtete dann noch längere Zeit, bis allmählich im Verlaufe der Zerstäubung die Fluoreszenz wieder verschwand.

Sah man von der erwähnten Anlaufzeit ab, so zeigte sich, daß die Schichten innerhalb der Fehlergrenzen der Apparatur sehr genau reproduzierbar waren. Die möglichen Fehler lagen hauptsächlich in der Einregulierung der Betriebsbedingungen und in der Schichtdickenbestimmung begründet. Letztere wies einen Fehler von  $\pm 0,01$  mg auf, d. h. für Silber würde das bei einer Gesamtfläche von etwa  $18\frac{1}{2}$  qcm einen Fehler von  $\pm 1 \mu\mu$  bedeuten. Die Maschinenspannung konnte auf  $\pm 1$  Proz. bei hohen,  $\pm 2$  Proz. bei niedrigen Spannungen konstant gehalten werden; für die Stromstärke betrug der maximale Fehler etwa  $\pm 5$  Proz., da sich die Verhältnisse im Gasraum bei verschiedenen Messungen nicht genauer reproduzieren ließen.

Jedoch kompensierten sich die von Strom und Spannung herührenden Fehler bis zu einem gewissen Grade, da eine Spannungssteigerung eine Stromabnahme zur Folge hatte. Der Gasdruck kam zumeist nur als abhängige Variable in Frage — bei vorgegebenem  $i$  und  $V$  ist er zwangsläufig festgelegt — und blieb auf  $\pm 5$  Proz. konstant.

#### d) Abhängigkeit von Gefäßform und Elektrodengröße

Die Messungen über den Einfluß der Gefäßwände wurden in der Weise ausgeführt, daß durch Einschieben von Glaszylindern in den Zerstäubungsraum dieser allmählich eingeengt wurde. Die Zylinder standen auf der Anode und wurden nach oben durch die Kathode abgeschlossen. Als Kathode fand stets dieselbe Silberplatte von 12 cm Durchmesser Verwendung; sie wurde mit Tempaxglasringen bis auf eine Fläche abgedeckt, die dem kleinsten jeweils zur Anwendung kommenden Zylinder entsprach. In der gleichen Weise wurde mit der Anode verfahren, um auch hier eine definierte Größe zu erhalten. Die Auffangplatten wurden so gewählt, daß sie stets wesentlich kleiner als die zur Verfügung stehende Kathodenfläche waren. Sie ruhten auf einem Glaszylinder in 6 cm Abstand von der Kathode. Tab. 1 gibt eine Übersicht über die erhaltenen Resultate für verschiedene Größen von Kathode und Anode. Dabei galten folgende konstante Werte:

$$V = 1500 \text{ Volt}, \quad i = 20 \mu\text{A}, \quad t = 15 \text{ Min.}$$

Tabelle 1

Kathode $2r = \text{cm}$	Anode $2r = \text{cm}$	Zylinder $2r = \text{cm}$	$I_d$ $\mu\mu$
5	5	18	22
5	5	12	22
5	5	9	9
5	5	5	4
9	9	18	54
9	9	12	45
9	9	9	33
9	9	12	45
9	12	12	56

Aus den beiden ersten Beobachtungsreihen für  $2r = 5$  und  $2r = 9$  cm folgt unter der Voraussetzung von konstanter Spannung und Stromstärke:

2. Die auf einer Auffangplatte niedergeschlagene Menge der Zerstäubungsprodukte nimmt zu mit dem Abstand der Gefäßwände von der Zerstäubungsbahn.

Bei großer Wandnähe gelangt ein erheblicher Teil der zerstäubten Kathodenmasse nicht mehr zur Auffangplatte, sondern schlägt sich auf den Gefäßwänden nieder. Bei der ersten Versuchsreihe zeigt sich, daß bei einem Wandabstand vom Kathodenrand, der etwa dem Kathodendurchmesser entspricht, keine Beeinflussung mehr stattfindet. (Beispiel: Kathodendurchmesser 5 cm, also Abstand Kathodenrand—Wand 5 cm, d. h. Zylinderdurchmesser 15 cm.) In der zweiten Versuchsreihe ist dieser Punkt offensichtlich noch nicht erreicht. Außerdem wird der Einfluß mit zunehmender Kathodenfläche geringer.

Ein Vergleich der beiden Versuchsreihen zeigt weiter:

3. Mit zunehmender Kathodenfläche wächst bei gleicher Stromstärke und Spannung die niedergeschlagene Zerstäubungsmenge.

Aus der dritten Versuchsreihe folgt:

4. Auch mit einer Vergrößerung der wirksamen Anodenfläche findet eine Zunahme der Zerstäubungsintensität statt.

Die hier angeführten Beobachtungen stehen zunächst im Widerspruch zu den Messungen von Plücker und Granquist. Mit abnehmender Kathodenfläche war dort eine Zerstäubungszunahme aufgetreten, also das genau Umgekehrte des hier Festgestellten. Das könnte durch verschiedene Dunkelraumverhältnisse hervorgerufen sein. Zur Entscheidung dieser Frage wurde die bis auf  $2r = 6$  cm abgedeckte 12 cm große Kathode mit einer solchen von nur 6 cm Durchmesser verglichen. Das Resultat zeigt Tab. 2. Herausgegriffen ist ein Wertepaar, für das die Beschlagsintensität etwa dieselbe ist.

Tabelle 2

Kathode $2r = \text{cm}$	Abgedeckt bis auf $2r = \text{cm}$	$V$ Volt	$i$ mA	$p$ mm	$D$ cm	$I_d$ $\mu\mu$
12	6	1500	40	0,33	0,5	42
6	—	1500	10	0,10	2,0	45
12	—	1500	10	0,09	4,0	40



Aus Tab. 2 folgt:

5. Die Größe des Dunkelraums ist von entscheidender Bedeutung für die Zerstäubungsintensität.

e) **Besondere Beobachtungen innerhalb des Kathodendunkelraums. Lage der Auffangplatten**

In einer Anzahl von Arbeiten, die sich mit der Herstellung kathodenzerstäubter Spiegel befassen, wurde angegeben, daß die Spiegel am besten an der Grenze des Kathodendunkelraumes gelängen (22, 20). Um den Einfluß der Lage der Auffangplatte zum Dunkelraum auf die Zerstäubungsintensität festzustellen, wurde ihr Abstand von der Kathode systematisch geändert. Als Betriebsdaten kamen in Frage: 1500 Volt,  $10\ \mu\text{Amp.}$ , etwa 0,16 mm Druck, Dunkelraumgröße etwa  $4\frac{1}{2}\text{ cm}$ , Abstand Kathode—Auffangplatte 1,  $1\frac{1}{2}$ , 2,  $2\frac{1}{2}\text{ cm}$  usw., Größe der Auffangplatte 60·90 mm.

Bei sämtlichen Versuchen trat eine außerordentlich scharf abgegrenzte Zonenbildung auf der Auffangplatte auf, die sich je nach der Schichtdicke in verschiedener Färbung bemerkbar machte. Die mittlere Zone war stets am geringsten bzw. überhaupt nicht bestäubt. Es folgte hierauf ein Bereich größter, darauf ein solcher geringer Schichtdicke, dann wiederum ein Gebiet stärkerer Bestäubung, das allmählich nach den Rändern der Auffangplatte zu in den normalen Zustand überführte. Gewöhnlich folgen bei Silber in der Durchsicht mit zunehmender Schichtdicke die Farben in folgender Reihenfolge: Gelb (etwa  $3\ \mu\mu$ ) — rötlich (etwa  $6\ \mu\mu$ ) — violett (etwa  $10\ \mu\mu$ ) — hellblau (etwa  $20\ \mu\mu$ ) — dunkelblau. Der Verlauf war in diesem besonderen Fall folgender: Die unbestäubte Fläche in der Mitte ging über in Gelb bis Rot. Es folgte scharf abgegrenzt dunkelblau, dann hellblau und schließlich ein nur schwach durchsichtiger, silbern reflektierender Ring am äußeren Rand. Gleichzeitig bildeten sich von den Plattenecken aus unbestäubte Streifen nach der Plattenmitte zu. Mit zunehmendem Abstand der Auffangplatte von der Kathode nahmen diese Erscheinungen an Schärfe ab und verschwanden schließlich in der Nähe der Dunkelraumgrenze. Außerhalb dieses Gebietes trat gewissermaßen eine Umkehr der Verhältnisse auf: Die Zerstäubungsintensität wurde von der Mitte der Auffangplatte aus nach den Rändern geringer. In der Nähe der Dunkelraumgrenze er-

reichte auch die niedergeschlagene Zerstäubungsmenge ihr Maximum. Mit weiter zunehmendem Abstand der Auffangplatte von der Kathode nahm sie dann schnell wieder ab (vgl. auch die in Fig. 8 wiedergegebenen Kurven zur Bestimmung der Ausbreitung der Zerstäubungsprodukte).

Nach den Kenntnissen über die Glimmentladung ist die Grenze des Kathodendunkelraumes als Quelle der Kanalstrahlen anzusehen, die entsprechend dem Feldverlauf in der Hauptsache senkrecht zur Kathode auf diese auftreffen. Die Erscheinungen innerhalb des Kathodendunkelraumes sind daher ohne weiteres verständlich.

*6. Gegenstände innerhalb des Kathodendunkelraumes verhindern ganz oder teilweise das Auftreffen von Kanalstrahlen auf eine entsprechende Fläche der Kathode und damit die sekundäre Emission von Metallatomen.*

Bei Metallen mit dunkelfarbenen Oxydschichten konnten solche Hindernisse im Dunkelraum sehr scharf auf der Kathode abgebildet werden dadurch, daß sich die im Verlaufe einer Zerstäubung angegriffene Kathodenoberfläche von den nicht zerstäubten Stellen außerordentlich gut abhebt. Die Abbildung war auch größenmäßig richtig. Aus diesen hier besprochenen Erscheinungen erklärt sich auch die alte Faustregel, daß die besten Schichten an der Dunkelraumgrenze zu erzielen wären. Sie stimmt insofern nicht, als auch in größeren Abständen von der Kathode noch Schichten gleicher Güte niedergeschlagen werden, aber es wird infolge der abnehmenden Intensität der Zerstäubungsprozeß nicht voll ausgenutzt.

Riefen schon die Auffangplatten innerhalb des Dunkelraumes Unregelmäßigkeiten hervor, so war das in noch höherem Maße von Gegenständen auf der Kathode selbst zu erwarten. Bei den erwähnten Versuchen mit teilweiser Kathodenabdeckung durch Glasringe bildete sich auf der Kathode ein Ringsystem aus, wie es in Fig. 3, Taf. XI, zu sehen ist. Der äußere Rand desselben war mit dem inneren Rand des Glasringes identisch.

*7. Glasteile innerhalb der Kanalstrahlenbahn laden sich positiv auf und beeinflussen den elektrischen Feldverlauf durch abstoßende Wirkung auf die Kationen.*

Die Größe der Aufladung, damit auch der Abstoßung, nimmt mit der Spannung zu, infolgedessen wird ein Ring in der Umgebung des Glases vor der Zerstäubung geschützt, dessen

Breite, wie beobachtet, von der angelegten Spannung abhängt. Direkt auf den dunklen Ring folgt ein solcher stärkster Zerstäubung (in der Figur deutlich erkennbar). Durch die abstoßende Wirkung trifft hier ein größerer Prozentsatz von Kanalstrahlen auf. Eine Bestätigung dafür, daß die Ringbildung die Folge einer positiven Aufladung des Glasringes ist, geben besonders die vier eingekerbten Ecken im Ringsystem. Hier lagen mit der Kathode verbundene Metallklammern zum Tragen des Glasringes, die die Wirkung der positiven Aufladungen lokal kompensierten. Diese Aufladung wurde übrigens bei höheren Spannungen zum Teil so groß, daß zwischen Kathode und Ring Überschläge, sogar Lichtbögen, auftraten, die häufig zu einer lokalen Zerstörung des Glasringes, als auch zu Verbrennungen auf der Kathode führten.

Zur Feststellung, inwieweit eine Feldverzerrung den Zerstäubungsverlauf, besonders auch die Bahn der Zerstäubungspartikel beeinflusst, wurden folgende Versuche unternommen: 1. Es wurde eine Metallspitze exzentrisch zur Zerstäubungsbahn aufgestellt, die in den Dunkelraum hineinragte und mit der Anode leitend verbunden war. 2. Drahtnetz zwischen Auffangplatte und Kathode, ebenfalls mit der Anode verbunden. 3. Dasselbe Netz zwischen Anode und Kathode senkrecht zu beiden, mit der Anode verbunden, diese selbst mit Glas vollständig abgedeckt. In der Zerstäubungsliteratur herrscht eine Meinungsverschiedenheit darüber, ob die Zerstäubungspartikel geladen oder ungeladen sind. Im ersten Falle wäre eine der Feldverzerrung entsprechende Unregelmäßigkeit in der Schichtbildung zu erwarten gewesen. In allen drei Fällen aber ergab sich

8. *Eine sichtbare Änderung der Beschlagsintensität oder in der Ausbreitung der Zerstäubungspartikel infolge von Verzerrungen des elektrischen Feldes konnte nicht festgestellt werden.*

Im übrigen ist auf das elektrische Verhalten der emittierten Metallteilchen bereits in der ersten Veröffentlichung über Kathodenzerstäubungsprobleme von A. v. Hippel (23) näher eingegangen worden.

Außer den bisher erwähnten Zonenbildungen auf Kathode und Auffangplatte wurde eine weitere derartige Unregelmäßigkeit auf der Auffangplatte beobachtet, wenn zwischen diese und die Kathode eine Kreisblende gebracht wurde; die Beobachtung kann unter Umständen zugleich einen Aufschluß über die

Ausbreitung der Teilchen geben. Besonders typisch war diese Erscheinung bei folgender Anordnung: Die Auffangplatte lag auf einem Tischchen, 6 mm darüber befand sich eine Kreisblende aus Glas von 9 mm Öffnung. Auf der Auffangplatte bildete sich nun ein Ringsystem aus, wie es auch in Fig. 4 schematisch dargestellt ist: In der Mitte tiefblauer Kreis von  $2r = 6$  mm, darum dunkelblauer Ring  $2r = 12$  mm, darauffolgend hellblauer Ring  $2r = 13\frac{1}{2}$  mm, und anschließend ein dunkelblauer von  $2r = 18$  mm, jeder Ring vom anderen scharf abgegrenzt. Daran schloß sich eine rötlichblaue und eine rötliche Zone  $2r = 22$  mm, beide ineinander übergehend, nach außen

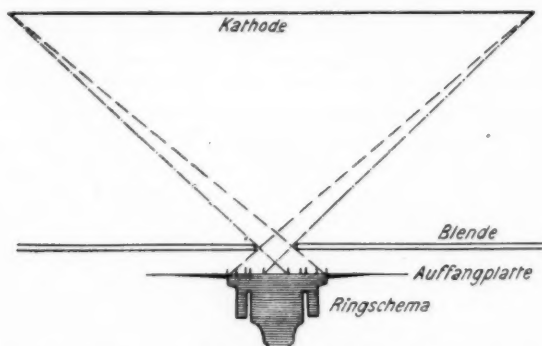


Fig. 4. Zonenbildung auf der Auffangplatte durch Blendenwirkung

aber scharf begrenzt. Als letzter trat ein gelber Ring auf, der sich in dem unbestäubten Teil der Platte verlor. Dieselbe Erscheinung trat unter ganz ähnlichen Bedingungen auch bei Knoll (3) auf, der nachwies, daß die Beschlagsdichte in den hellen Ringen oft nur ein Prozent der beiderseitigen Umgebung ausmachte. Nimmt man an, daß die Teilchen sich von der Kathode aus zwar nach allen Richtungen, in der Hauptsache aber geradlinig ausbreiten, so ist der mittlere am stärksten bestäubte Fleck und der äußere Rand auf Grund einer rein geometrischen Strahlenkonstruktion nach Art des Kern- und Halbschattens zu erklären. Bei der Ausbildung des Ringsystems spielen offensichtlich Reflexionen von Teilchen am Rand der Blende eine Rolle, zumal die Breite der Ringe größenordnungsmäßig der Dicke der Blende entsprach. Es folgt:

9. Eine Lochblende in der Zerstäubungsbahn ruft die gleichen Erscheinungen auf einer dahinter befindlichen Auffangplatte hervor, wie eine Lochblende im Strahlengang einer Lichtquelle von der Größe der Kathode auf einem dahinter befindlichen Schirm.

### 3. Die Temperaturabhängigkeit der Zerstäubung

#### a) Vorbemerkungen

Die in einer Glimmentladung vernichtete elektrische Energie tritt zum großen Teil als Wärme nach außen wieder in Erscheinung; durch Ionenanprall an die Gasmoleküle wird die Temperatur des Fallraumes, durch Ionenaufprall auf die Kathode die Temperatur des Kathodenmetalles gesteigert. Die Erwärmung des Gasraumes kann den auf Druckregistrierung angewiesenen Beobachter zu einer Täuschung über die tatsächliche Gasdichte führen; er muß eine Drucksteigerung vornehmen, um die alten Zerstäubungsverhältnisse wieder herzustellen, die eine konstante freie Weglänge der Kationen bedingen. Die Erwärmung der Kathode hingegen könnte direkt auf den Mechanismus der Kathodenzerstäubung Einfluß haben. Dieser Punkt ist schon vor längerer Zeit einmal von Granquist (6) an Platin untersucht worden. Seine Beobachtungen führten zu dem damals völlig unerwarteten Resultat, daß die Zerstäubungsintensität nicht von der Kathodentemperatur abhängt, und damit zur Abkehr von der Verdampfungstheorie. Da die Beobachtungen von Granquist nach unseren jetzigen Kenntnissen nicht mehr als einwandfrei gelten können, wurde bei der Wichtigkeit dieses Punktes der Versuch an Silber in verbesserter Form wiederholt.

#### b) Die Versuchsanordnung

Die Apparatur (Fig. 5) bestand aus einem Messingzylinder  $Z$ , dessen Unterseite mit einer in der Mitte beiderseitig ausgefrästen Messingplatte  $P$  hart zugelötet war. Auf die innere Bodenfläche kam die als Kathode  $K$  dienende Silberplatte zu liegen, auf der Außenseite schmiegte sich ein Heizwiderstand ein. Das andere Ende des Zylinders wurde durch einen Messingring  $R$  abgeschlossen, auf dem ein Schliff  $S$  für Quecksilberdichtung aufsaß. Seitlich mündete in den Zylinder ein Messingrohr zur Gaszuführung mit Quecksilberschliff versehen. Als Gegenschliff zum Schliff  $S$  diente ein solcher aus Messing, der mit einer Nut zum

Aufkitten eines Glasansatzes *G* versehen war. Durch diesen hindurchgeschmolzen war die Zuleitung zur Anode (+), während die negative Spannung (—) direkt an den Zylinder gelegt wurde.

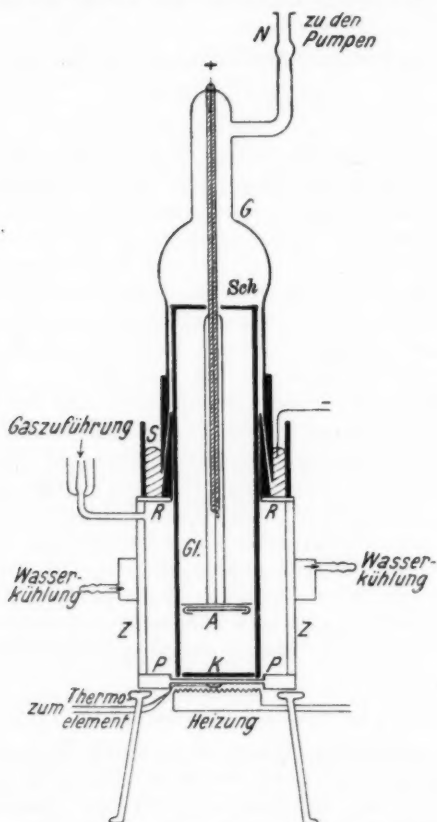


Fig. 5. Zerstäubungsgefäß zur Untersuchung der Abhängigkeit von der Kathodentemperatur

Einseitlicher Normalschliff *N* diente zur Verbindung mit den Pumpen. Als Anode *A* wurde ein Kupferblech benutzt, das gleichzeitig zur Befestigung der Auffangplatte diente. Die eigentliche Zerstäubung fand in einem Glaszylinder *Gl.* statt,

der auf der Silberkathode aufsaß und eine Zerstäubung des Messinggehäuses zu verhindern hatte. Aus diesem Grunde mußte seine obere Öffnung mit einer Glasscheibe *Sch* abgedeckt werden, die lediglich zur Durchführung der Anodenzuleitung und zur Gasabführung mit einer kleinen Bohrung versehen war, außerdem mußte die Anodenzuführung durch Verglasung abgeschildert werden. Für die Gaszufuhr erhielt der Glaszylinder am Boden einige Aussparungen. Die Kathode konnte auf 600° C elektrisch geheizt werden. Die Temperatur wurde mittels Thermolement gemessen, dessen eine Lötstelle sich zwischen Heizwiderstand und Messinggehäuse befand, an letzterem fest anliegend, gegen den Heizfaden isoliert. Um eine Erhitzung der Gesamtapparatur zu vermeiden, befand sich 5 cm über dem Boden ein wasserdurchflossener Kühlring.

### c) Die Messungen

Die Zerstäubung fand in der üblichen Weise bei strömendem Wasserstoff statt. Zur vergleichenden Messung wurden zwei auseinanderliegende Temperaturen als Fixpunkte gewählt, und zwar Zimmertemperatur (15–20°) und 500° C. Tab. 3 gibt eine Übersicht über die erhaltenen Wertepaare für zwei verschiedene Meßreihen. Bei ungeheizter Kathode stieg die Kathodentemperatur auf etwa 25–30° C im Verlaufe einer Zerstäubung an. Aus beiden Meßreihen ergibt sich in der gleichen Weise:

Tabelle 3

Volt	$\mu\text{A}$	ohne Heizung		mit Heizung	
		$p$ mm	$I_d$ $\mu\mu$	$p$ mm	$I_d$ $\mu\mu$
2000	10	0,12	42	0,20	43
2000	10	0,10	42	0,205	41
2000	10	0,10	40	0,205	41
2000	10	0,12	44	0,204	43
1500	20	0,28	28	0,45	33
1500	20	0,29	30	0,44	30
1500	20	0,27	31	0,43	29
1500	20	0,28	30	0,42	31

10. Die Beschlagsintensität ist bei konstanter Spannung und konstanter Stromstärke von der Kathodentemperatur unabhängig; greift eine kathodische Temperaturerhöhung auf den Gasraum über,

so ist zur Erzielung derselben Betriebsbedingungen die Herstellung der gleichen gaskinetischen Verhältnisse, d. h. eine Druckerhöhung erforderlich. Es mußte also mehr Gas zugelassen werden.

Es werden damit die für Platin in Luft ausgeführten Granquistschen Messungen für Silber in Wasserstoff bestätigt. Gleichzeitig erhellt aus diesen Feststellungen, daß zur Auswertung von Versuchsergebnissen auch die jeweilige Temperatur des Gases bekannt sein muß, bzw. die Gastemperatur innerhalb gewisser Grenzen konstant zu halten ist.

#### 4. Die Abhängigkeit von den Betriebsbedingungen ( $V$ , $i$ , $p$ , $D$ )

##### a) Die bisherigen Kenntnisse

1. *Kathodenfall*: Messungen über die Abhängigkeit der Zerstäubung von der Betriebsspannung bzw. dem Kathodenfall wurden von Granquist (7), Holborn und Austin (4) und Kohlschütter (1) ausgeführt. Bei allen wurden Spannung und Druck beobachtet und die Stromstärke konstant gehalten. Die beiden zuerst genannten Arbeiten wurden in Luft unter inkonstanten Verhältnissen ausgeführt, zudem in sehr engen Entladungsgefäßen. Die Messung der Spannung erfolgte mit einer Sonde in stets konstantem, sehr geringem Abstand von der Kathode. Die kathodischen Gewichtsverluste wurden bei Granquist durch graphische Interpolationen mit Hilfe einer Kurve: Gewichtsverlust in Abhängigkeit vom Druck, für die verschiedenen Drucke ermittelt. Einwandfreier waren die Beobachtungen Kohlschütters im Stickstoff und Argon. Die Spannung variierte aber nur zwischen 350 und 1500 Volt. Diese Messungen mit unzureichenden Versuchsanordnungen und Betriebsbedingungen galten bis zum gegenwärtigen Zeitpunkt als Grundlage für die Kathodenzerstäubungserscheinungen, obwohl von den Verfassern zum Teil selbst bemerkt wurde, daß oberhalb gewisser Spannungswerte überhaupt keine reproduzierbaren Messungen möglich waren.

Die angeführten Arbeiten kamen zu folgenden Ergebnissen (vgl. auch Fig. 6). Innerhalb gewisser Grenzen steigt die Zerstäubungsintensität mit zunehmender Spannung bei konstanter Stromstärke geradlinig an. Die untere Grenze liegt bei 400 bis 600 Volt, unterhalb deren keine meßbare Zerstäubung stattfindet. Außerdem erreicht die Zerstäubung (nach Kohlschütter) einen oberen Grenzwert, der sich als stark abhängig



von der Natur des Gases erweist, derart, daß er mit zunehmendem Atomgewicht des Gases bei höheren Spannungen liegt. Im Wasserstoff wurde dieser Wert sehr schnell erreicht, so daß die Zerstäubung in diesem Gas keine regelmäßige Erscheinung war. Ein solcher oberer Grenzwert (bei 3000 Volt) wurde auch von Leithäusser beobachtet (24). Knoll (3) stellte außerdem für Luft bei 2200—2500 Volt einen Maximalwert der Zerstäubung

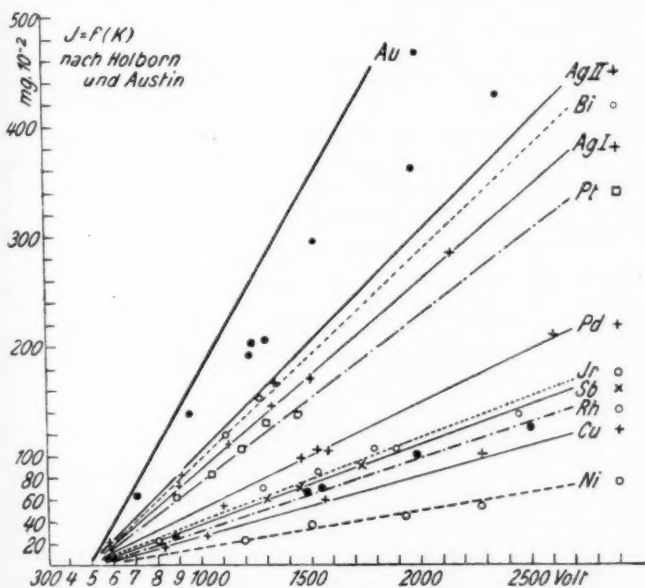


Fig. 6. Die Beschlagsintensität in Abhängigkeit vom Kathodenfall nach Holborn und Austin

fest, welcher sich je nach der Gaszusammensetzung verschob, ebenso mit dem Abstand Kathode—Auffangplatte. Beobachtungen von Tyndall und Hughes (25) zeigten bei niederen Spannungen eine asymptotische Anschmiegung der Kurven  $I_a = f(V)$  an die Abszisse, die bei etwa 500 Volt geschnitten werden sollte.

2. Stromstärke: Granquist glaubte aus seinen Messungen eine quadratische Zunahme der Zerstäubungsintensität mit der

Stromstärke feststellen zu können, er hielt aber die Spannung nicht konstant, die mit wachsender Stromstärke ebenfalls anstieg. Kohlschütter wies bereits darauf hin und zeigte durch Messungen mit zwei Stromstärken ( $0,35$  und  $0,7 \mu\text{Amp.}$ ) einen linearen Verlauf der Kurve  $I_d = f(i)$  „unter sonst gleichen Verhältnissen“. Tyndall und Hughes dagegen behaupteten, die Abhängigkeit von der Stromstärke sei weder linear, noch quadratisch, sondern liege in der Mitte zwischen beiden Werten.

3. *Gasdruck*: Die bisher vorliegenden Beobachtungen über den Einfluß des Gasdruckes sind kaum verwertbar, da sie zu meist aus jetzt nicht mehr einwandfrei erscheinenden Messungen durch Umrechnung unter nicht erwiesenen Annahmen erhalten wurden. Kohlschütter konstruierte hyperbolische Kurven für  $I_d = f(p)$ , wies aber zugleich darauf hin, daß der Druck die Verhältnisse der Glimmentladung beeinflusse, und somit wohl nur eine sekundäre Rolle spiele.

Auf andere Faktoren waren die Untersuchungen bisher nicht ausgedehnt worden.

Aus dem oben angeführten Beobachtungsmaterial geht hervor, daß nur eine Überprüfung der gesamten Zerstäubungsverhältnisse mit exakteren Hilfsmitteln zu einer Klärung der physikalischen Vorgänge führen kann.

#### b) Die Versuchsanordnung

Auf Grund der bei den bisherigen Untersuchungen gemachten Erfahrungen wurde eine neue Apparatur zusammengestellt. Als erforderlich hatten sich erwiesen: 1. Großes Zerstäubungsgefäß; 2. Beseitigung aller dampf- und gasabgebenden Bestandteile; 3. Konstanthalten der Gastemperatur während der Zerstäubung; 4. Beseitigung von Randwirkungen auf der Auffangplatte; 5. Messung des Kathodenfalles und der Dunkelraumdicke.

Als Grundplatte  $P$  (Fig. 7) wurde eine von der Firma Zeiss zur Verfügung gestellte  $4 \text{ cm}$  starke polierte Glasplatte von  $50 \cdot 50 \text{ cm}$  Grundfläche verwendet, die für die verschiedenen Zuführungen mit vier zu Schliffen ausgebildeten Bohrlöchern versehen war. Die Glasglocke  $G$  mit poliertem Grundschliff wurde nach einigen Versuchen mit Gummiringen (Contentinal) durch einen Quecksilberring  $Q$  abgedichtet. Da ein Auftreten von Fettdämpfen hierdurch nicht mehr möglich war, wurde die bisher

benutzte innere Glocke in Wegfall gebracht. Die Kathode *K* wurde durch Auflage auf eine wasserdurchflossene Glasspirale *Sp* gekühlt. Auf der Glocke saß das Manometer, dessen Zuführung eine Durchschmelzung zum Aufhängen der Anode *A* aufwies.

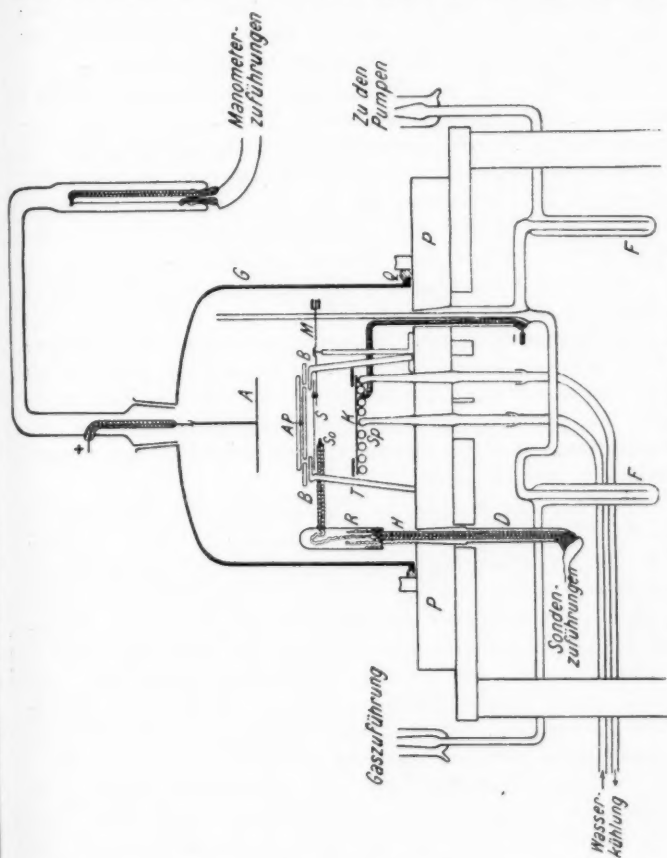


Fig. 7. Das endgültige Zerstäubungsgefäß

Gaszuleitung, Pumpenanschluß und Stromzuführung zur Kathode erfolgten durch einen gemeinsamen Schliff, letztere bis zur Kathode verglast. Das Gaszuleitungsrohr führte im Zerstäubungsgefäß 18 cm höher als der Pumpenanschluß, um eine

zwangsläufige Durchspülung des gesamten Raumes zu erzielen. Die Auffangplatte  $AP$  lag zusammen mit einer sie umgebenden Glasblende  $B$  auf einem Glastischchen  $T$ , das auf der Grundplatte stand; sie bildete mit der Blende zusammen eine einheitliche Kreisfläche von 12 cm Durchmesser. Abgedeckt werden konnte die Auffangplatte gegen die Kathode mit der erwähnten an einer Magnetonadel  $M$  befestigten Glimmerscheibe  $S$ .

Gaszuführung, Gasreinigung und Druckmessung erfolgten mit den bereits eingangs erwähnten Anordnungen. Zwei Ausfrieraschen  $F$  vor und hinter dem Zerstäubungsgefäß gaben Gelegenheit zur Erzielung höherer Reinheitsgrade. Es zeigte sich allerdings, daß Schichten, die mit und ohne Kühlung durch flüssige Luft hergestellt waren, keinen Unterschied, weder in der Schichtdicke, noch in ihrer Reinheit, aufwiesen.

Beobachtungen über die Wirkung der Kathodenkühlung führten zu der Feststellung, daß bei einer Bestäubungsdauer von 20 Minuten die Kathodentemperatur bei 3000 Volt Spannung und 20  $\mu$ Amp. Stromstärke auf etwa 90° anstieg, während der Gasraum seine Temperatur nur um 10–20° erhöhte. Eine erhebliche Temperaturbeeinflussung der Vorgänge war somit ausgeschlossen, zumal die Bestäubungszeit bei hohen Spannungen wesentlich geringer gewählt wurde.

Zur direkten Messung des Kathodenfalles war eine während der Zerstäubung in ihrer Höhe veränderliche Sonde *So* erforderlich. Nach Beobachtungen von Langmuir (26) konnte hierfür nur eine Glühsonde in Frage kommen, da man bei kalten Sonden infolge von Aufladungen mit Falschmessungen rechnen mußte. Bei der vorliegenden Anordnung wurde die Spannung Anode—Sonde gemessen, und zwar in Kompensationsschaltung. Sie wurde einem Spannungsteiler von etwa 500000 Ohm Widerstand entnommen, der aus einem 2 m langen, mit Borsäure-Mannitlösung gefüllten Glasrohr bestand und dessen Elektroden unten eingeschmolzen, oben eingetaucht waren. Die Spannungsentnahme erfolgte mittels einer in einem engen Glasrohr geführten und an einem Ende durchgeschmolzenen Zuleitung, die in dem Flüssigkeitswiderstand verschoben werden konnte. Einstellung und Konstanz der abgenommenen Spannung entsprachen den Verhältnissen eines Drahtwiderstandes (im Gegensatz zu Silit u. ä.). Gemessen wurde bei glühender Sonde mit elektrodynamischen Instrumenten, und zwar wurde

unter Zuhilfenahme eines Galvanometers die Spannung eingestellt, bei der im Kreis Sonde-Anode-Sonde kein Strom floß. Die Höhenregulierung der Sonde erfolgte durch einen Drehschliff *D* (Fig. 7) von außen, der zugleich die verglasten Zuführungen zur Sonde enthielt, auf denen ein steiles Hartaluminiumgewinde *H* befestigt war. Die dazu passende Mutter war in ein oben zugeschmolzenes Glasrohr eingesetzt, das als seitlichen wagerechten Arm die eigentliche Sonde trug. Bei Anschlag dieses Armes, der, abgesehen von dem Heizfaden, verglast war, an die Beine des Tragetischchens *T* für die Auffangplatte konnte die Höhenlage der Sonde durch Drehen des Schliffes verändert werden, da die Verbindung zwischen Sondenarm und Zuführungen aus leichtbeweglicher Litze hergestellt war. Zur Vermeidung von Falschmessungen mußte verhindert werden, daß sich infolge von Bestäubung eine leitende Verbindung mit Apparateilen in anderer Höhenlage ausbildete. Durch Überschieben eines kleinen Glasröhrchens über den Seitenarm war das leicht zu erreichen.

#### c) Die Ausbreitung der Zerstäubungspartikel

Die Messung der Beschlagsintensität erfolgte, wie mitgeteilt, durch Beobachtung der auf einer Auffangplatte in einem bestimmten Abstand von der Kathode niedergeschlagenen Teilchen. Die Größe dieses Abstandes wäre ohne Bedeutung, wenn die Ausbreitungsgesetze der abgestäubten Mengen bekannt wären. Auch könnten dann Rückschlüsse auf die tatsächliche Zahl der von der Kathode emittierten Atome gezogen werden.

Die Mehrzahl aller Forscher war der Meinung, daß sich die Zerstäubungsprodukte senkrecht zur Kathodenoberfläche geradlinig fortbewegen. Belegt wurde diese Anschauung durch Experimente, die nicht unbedingt beweiskräftig erschienen.

In Widerspruch mit der Annahme einer geradlinig senkrechten Ausbreitung steht die Tatsache einer außerordentlich starken Streuung der Zerstäubungsprodukte und die Abnahme ihrer Zahl mit der Entfernung von der Kathode.

Diese älteren Arbeiten geben offensichtlich keinen einwandfreien Aufschluß über die vorliegenden Verhältnisse. Es war somit eine quantitative Untersuchung der Intensitätsabhängigkeit vom Abstände Kathode—Auffangplatte erforderlich.

Der Grundgedanke bei den Versuchen war folgender: Sind

die von der Kathode emittierten Teilchen ungeladene Metallatome, so kann man, wie in der ersten Mitteilung durch A. v. Hippel (23) ausgeführt wurde, die Ausbreitung in den Gasraum hinein als ein Diffusionsproblem auffassen. Dabei wird eine Abhängigkeit der Beschlagsdichte von dem Austrittsgesetz der Partikel aus der Kathode um so mehr in Erscheinung treten, je größer die freie Weglänge ist, d. h. je geringer die Wahrscheinlichkeit für eine Streuung durch Zusammenstöße

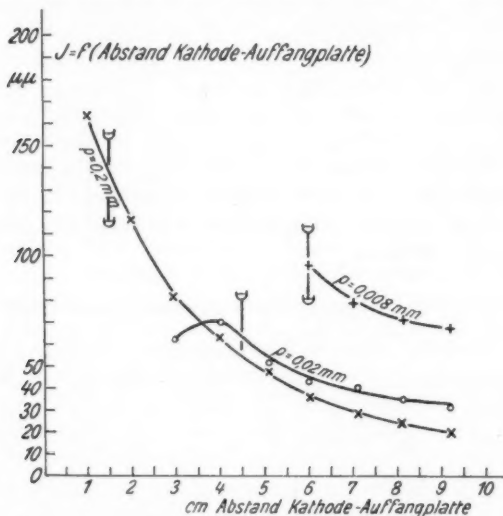


Fig. 8. Die Beschlagsintensität in Abhängigkeit von Abstand Kathode-Auffangplatte

im Gasraum wird. Dementsprechend wurden die Versuche in folgender Weise ausgeführt: Eine kreisrunde Scheibe von  $2r = 4$  cm, die mit einer sie umgebenden Blende von  $2r = 12$  cm eine einheitliche Fläche bildete, wurde in verschiedenen Abständen von der Kathode und bei verschiedenen Betriebsbedingungen der Zerstäubung ausgesetzt. Die Betriebsdaten waren 1500 Volt,  $50 \mu\text{Amp.}$ , etwa  $0.2 \text{ mm}$  Druck; 2500 Volt,  $20 \mu\text{Amp.}$ , etwa  $0.02 \text{ mm}$  Druck; 3500 Volt,  $20 \mu\text{Amp.}$ , etwa  $0.008 \text{ mm}$  Druck. Als Versuchsgas diente Argon. Das Ergebnis ist in Fig. 8 wiedergegeben. Die jeweilige Lage des Dunkelraums ist durch einen Strich mit  $D$  gekennzeichnet.

11. In allen Fällen bekommen wir einen Abfall der Beschlagsintensität mit der Entfernung von der Kathode, der einem exponentiellen Gesetz zu folgen scheint.<sup>1)</sup> Er macht sich bereits innerhalb des Kathodendunkelraums bemerkbar; bei tieferem Eindringen der Auffangplatte in den Dunkelraum tritt der früher diskutierte Effekt einer Intensitätsabnahme durch Schutz der Kathode vor Kanalstrahlen auf. Der Verlauf in Wasserstoff war nach früheren Beobachtungen ein entsprechender.

#### d) Die Abhängigkeit vom Kathodenfall

Die Messungen wurden zunächst an Silber in Wasserstoff vorgenommen, dann aber außerdem für die folgenden 16 Metalle durchgeführt: Mg, Al, Si, Fe, Ni, Cu, Zn, Se, Ag, Cd, Sn, Sb, W, Pt, Au, Pb, Bi, und zwar in den Gasen H, N, Ar. Beobachtet wurden stets: Spannung, Kathodenfall, Stromstärke, Gasdruck, Größe des Kathodendunkelraums (mit Kathetometer abgelesen). Messungen des Kathodenfalls mit der Sonde ergaben, daß der Hauptspannungsabfall zwischen dem Ende des Kathodendunkelraums und der Kathode erfolgt, wie das bereits aus den Beobachtungen über die Erscheinungen der Glimmentladung bekannt ist. Im Vergleich zur Gesamtspannung ist der Anodenfall sehr klein, etwa 3—4 Proz. bei einer Stromstärke von 20  $\mu$ Amp. Mit zunehmender Stromstärke stieg der Prozentsatz auf 5 bis 8 Proz. bei 50  $\mu$ Amp. In den folgenden Tabellen ist lediglich die zwischen Anode und Kathode gemessene Spannung angegeben. Die Hauptmessungen wurden sämtlich mit einer Stromstärke von 20  $\mu$ Amp. durchgeführt. Eine zweite Meßreihe mit größerer Stromstärke sollte speziell den Verlauf bei niedriger Spannung zeigen, da auf solche Weise bei den an und für sich geringeren Zerstäubungswerten größere Genauigkeit zu erwarten war.

Tab. 4 gibt für Ag in H den Verlauf je einer Meßreihe für 20 und 50  $\mu$ Amp. Stromstärke, während die Figg. 9, 10 den Verlauf graphisch zeigen. Die Intensitätswerte sind sämtlich auf eine Zeit  $t = 20$  Minuten bezogen. Für die höchsten Spannungswerte wurden experimentell geringere, für die niederen längere Bestäubungszeiten gewählt. Der Abstand Kathode—Auffangplatte betrug 5,5 cm.

1) A. Güntherschulze findet für die normalzerstäubenden Metalle einen qualitativ ähnlichen Zusammenhang zwischen dem Gewichtsverlust der Kathode und dem Elektrodenabstand.

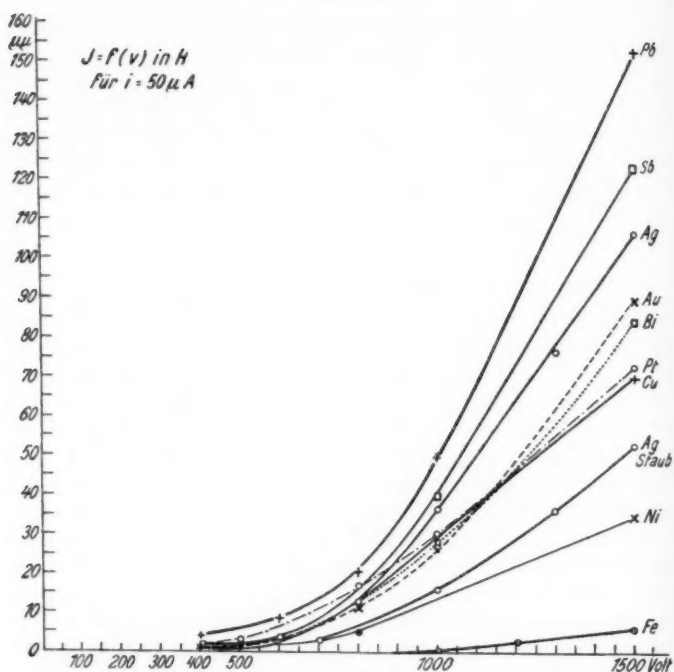


Fig. 9. Die Beschlagsintensität in Abhängigkeit vom Kathodenfall  
für  $i = 50 \mu$  in  $\square$  Wasserstoff

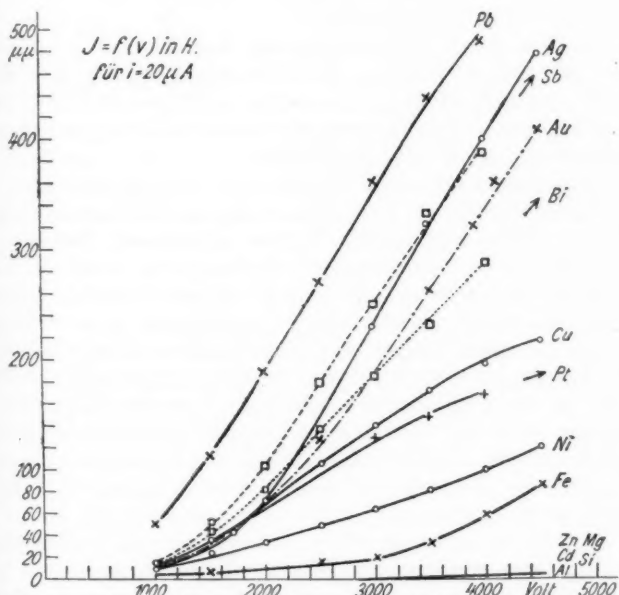
Tabelle 4

$V$ Volt	$i$ mA	$D$ mm	$p$ mm	$I_a$ $\mu\mu$
4500	20	60	0,0065	478
4000	20	49	0,0012	400
4000	20	—	—	400
3500	20	44	0,0140	332
3000	20	40	0,0290	230
3000	20	—	0,0240	234
2300	20	30	0,072	99
2000	20	27	0,085	69
1700	20	—	0,120	42
1500	20	20	0,160	$30\frac{1}{2}$
1000	20	14	0,30	10



Tabelle 4 (Fortsetzung)

$V$ Volt	$i$ $\mu A$	$D$ mm	$p$ mm	$I_a$ $\mu\mu$
1500	50	13	0,35	107
1300	50	—	—	77
1000	50	8	0,5	36
800	50	7	0,6	13
600	50	5	0,8	$2\frac{1}{2}$
500	50	—	1,1	1
400	50	2	1,8	$\frac{1}{2}$

Fig. 10. Die Beschlagsintensität in Abhängigkeit von Kathodenfall für  $i = 20 \mu$  in Wasserstoff

Die Meßreihen  $I_a = f(V)$  im Intervall von 0—1500 Volt für  $50 \mu A$  Stromstärke ergeben:

12. Die Beschlagsintensität nimmt mit sinkender Spannung zunächst angenähert proportional zu  $V$  ab, nähert sich aber schließlich asymptotisch dem Werte Null, ohne denselben bis zur Grenze des normalen Kathodenfalls zu erreichen.

Beobachtungen bei nicht mehr vollständig vom Glimmlicht bedeckter Kathode zeigten:

13. *Auch innerhalb des normalen Kathodenfalls findet noch eine Zerstäubung statt, wenn sie auch so gering ist, daß sie zwar noch wahrgenommen, aber nicht mehr ausgewertet werden kann.*

Auch die Kurven für  $i = 20 \mu\text{Amp.}$  zeigten denselben Verlauf.

Der Kurvenverlauf für  $i = 20 \mu\text{Amp.}$  wurde bis zu Spannungen von 4500 Volt verfolgt; in diesem Bereich war bisher überhaupt noch nicht gemessen worden. Die gefundenen Werte führten zu folgendem Resultat:

14. *Mit steigender Spannung zeigt sich im allgemeinen noch über 2000 Volt ein Steilerwerden der Kurven  $I_a = f(V)$ . Ein eindeutig geradliniger Verlauf  $I_a = c \cdot V$  ( $c = \text{Konstante}$ ) kommt also nicht in Frage. Ein oberer Grenzwert konnte auch bei Spannungen von 5000 Volt nicht festgestellt werden.*

Allerdings zeigte sich bei einigen Metallen für Spannungen über 3000 Volt mit steigender Spannung ein Flacherwerden der Kurven. Diese Erscheinung ist aber sekundären Charakters, und dadurch begründet, daß die Auffangplatte innerhalb des Kathodendunkelraums lag. Der Beweis für diese Annahme wurde für Platin erbracht durch die Aufnahme einer zweiten Kurve mit größerem Abstand Auffangplatte—Kathode. Als die Auffangplatte auch bei den höchsten Spannungen nicht mehr in den Dunkelraum hineinragte, war eine Intensitätsabnahme pro Volt auch bei den höchsten Spannungen nicht mehr vorhanden. Eine derartige Erscheinung wird voraussichtlich auch bei den früheren Beobachtern eines oberen Grenzwertes vorgelegen haben.

Bei der Aufnahme der Kurven wurde noch eine andere für den Zerstäubungsvorgang wichtige Beobachtung gemacht:

15. *Ein Teil der von der Kathode abgestäubten Metallpartikel schlägt sich mit abnehmender Spannung in zunehmendem Maße wieder auf der Kathode nieder in der Form eines leicht abwischbaren Beschlages.*

Bei Betriebsspannungen unterhalb von 1000 Volt trat er für das Auge auffällig in Erscheinung. Wurde dieser besonders bei geringen Spannungen niedergeschlagene Belag nicht vor jeder neuen Zerstäubung entfernt, so ergab sich bei einer Überprüfung der Meßpunkte eine zweite Kurve, die weit unterhalb

der ursprünglichen lag, wie es von Tab. 5 veranschaulicht wird (vgl. auch Fig. 39).

Tabelle 5

V Volt	$I_d$	$I_d$
	ohne Beschlag $\mu\mu$	mit Beschlag $\mu\mu$
1500	107	53
1300	77	$36\frac{1}{2}$
1000	36	16
800	13	5
700	7	3
600	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
500	1	1
400	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Die rückgestäubten Teilchen spielen offenbar die gleiche Rolle wie die Oxydschichten und Verunreinigungen der Kathoden, die einen Zerstäubungsverzug herbeiführen. Auch bei hohen Spannungen verzögern einmal vorhandene Staubschichten die Zerstäubung, sie werden aber im Verlaufe derselben nach einiger Zeit beseitigt. Gleichzeitig weisen diese Staubschichten, die sich bei niedriger Spannung in besonders hohem Maße ablagern, darauf hin, daß bei diesen geringen Spannungswerten eine wesentlich stärkere Zerstäubung der Kathode stattfindet, als sie quantitativ nachgewiesen werden kann, daß aber diese Mengen sich von der Kathode nicht mehr weit entfernen können infolge der ihnen vermittelten geringen Bewegungsenergie und der Rückdiffusion. Mit dieser Beobachtung dürfte zugleich das Auftreten der Kurve Ag I und Ag II bei Holborn und Austin (Fig. 6) geklärt sein. Diese Rückstäubung wurde außer bei Silber in besonders hohem Maße bei Blei beobachtet, trat aber auch bei den anderen Metallen auf.

Im Zusammenhang mit diesen Feststellungen wurden die Kathoden nach unter verschiedenen Betriebsbedingungen vorgenommenen Zerstäubungen einer mikroskopischen Untersuchung unterzogen. Es zeigte sich:

16. Zerstäubung bei hohen Spannungen führt zu einer kraterförmigen Aufrauung der Kathodenoberfläche, während niedere Spannungen die Oberfläche nur wenig angreifen, infolge der Rückstäubung sogar zu einer event. Einebnung führen.<sup>1)</sup>

1) Anmerkung bei der Korrektur: Diese Erscheinungen sind in einer von Prof. Kohlschütter angeregten Arbeit von W. Feitknecht (Helv. Chim. Acta VII. 5. S. 825) näher untersucht worden, auf die wir während der Korrektur durch Hrn. Prof. Kohlschütter aufmerksam gemacht wurden.

In den Figg. 11—12 sind zwei Beispiele wiedergegeben, die durch mikroskopische Aufnahmen an Gold gewonnen wurden. Fig. 13 zeigt die Aufnahme der Silberkathode nach Zerstäubung bei niedriger Spannung mit rückgestäubtem Material, das zur Hälfte abgewischt ist.

Abgesehen von der durch die Rückstäubung hervorgerufenen Änderung der Beschlagsintensität konnte eine Abhängigkeit von der Oberflächenbeschaffenheit einer von Verunreinigungen freien Kathode nicht festgestellt werden; d. h. eine aufgeraute und eine gleichmäßig ebene Kathode ergaben dieselben Zerstäubungswerte.

Fassen wir noch einmal die Ergebnisse dieses Abschnittes zusammen: Die früheren Messungen ergaben für die Zerstäubungsintensität in Abhängigkeit vom Kathodenfall eine Kurve  $I = c(V - S)$ , unter  $S$  einen Schwellenwert verstanden, der bei 400—600 Volt, also oberhalb des normalen Kathodenfalls lag, unterhalb dieses Wertes fand keine Zerstäubung statt. Außerdem wurde ein oberer Grenzwert beobachtet, von dem an die Zerstäubung nicht mehr zunahm. Für Silber wurden zwei verschiedene derartige Kurven gefunden.

Die hier angestellten Untersuchungen zeigten: Eine Zerstäubung findet auch noch innerhalb des normalen Kathodenfalls statt. Kurven  $I_a = f(V)$  entfernen sich mit wachsender Spannung *asymptotisch* von der Spannungsordinate und zeigen auch bei höheren Spannungen noch ein *Steilerwerden*.<sup>1)</sup> Ein oberer Grenzwert existiert bis zu 5000 Volt Spannung nicht. Ein Umbiegen der Kurven findet nur dann statt, wenn die Auffangplatte in den Dunkelraum hineinragt. Ein Teil der Zerstäubungspartikel kehrt zur Kathode zurück, mit abnehmender Spannung in steigendem Maße; dieser abgelagerte Staub kann zu einer Reduktion der Beschlagsintensität führen, so daß Kathoden mit Staub eine zweite niedrigere Kurve  $I_a = f(V)$  ergeben können.

---

1) Dieses Resultat steht im Gegensatz zu den Messungen von A. Güntherschulze, der wiederum wie die alten Arbeiten Proportionalität zwischen Gewichtsverlust der Kathode und Kathodenfall feststellt und für Cu diese Kurve zum normalen Kathodenfall extrapoliert.

## e) Der Zusammenhang zwischen Beschlagsintensität und Stromstärke

Die Abhängigkeit der Beschlagsintensität von der Stromstärke läßt sich feststellen; 1. bei konstanter Spannung, 2. aus der an die Kathode abgegebenen Energie, 3. aus der aufgewendeten Betriebsenergie.

$$\alpha) I_a = f(i) \text{ für } V = \text{Const.}$$

Die Beschlagsintensität in Abhängigkeit von der Stromstärke allein aufzunehmen, ohne gleichzeitige Änderung von

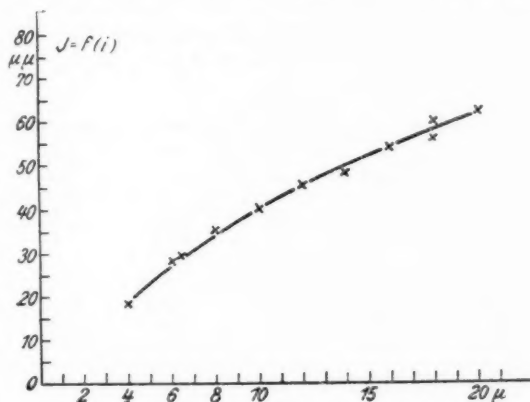


Fig. 14. Die Beschlagsintensität in Abhängigkeit von der Stromstärke für Ag in Wasserstoff

anderen Faktoren ist, infolge ihres funktionellen Zusammenhangs mit diesen experimentell nicht möglich. Man kann aber den eventuellen Einfluß der übrigen Veränderlichen diskutieren. Eine Erhöhung der Stromstärke bei konstanter Spannung bedingt höheren Druck und geringere Dunkelraumdicke. In größter Annäherung gilt: Dunkelraumdicke  $\times$  Druck = const., d. h. für die Kationen wird die Spannung pro freie Weglänge nicht geändert. Demnach kann man annehmen, daß Kurven  $I_a = f(i)$  für  $V = \text{const.}$  in erster Linie den Einfluß der Stromstärke auf die Beschlagsintensität widerspiegeln. Dabei ist allerdings zu beachten, daß der Elektronenstromanteil am Gesamtstrom — für die Zerstäubung kommt natürlich nur

der Kationenstrom in Frage — merklich werden und die Meßpunkte zu tief legen kann. Nach einer kürzlich erschienenen Untersuchung von Güntherschulze (2) müßte dieser Elektronenstrom sogar recht erheblich sein.

Die experimentell aufgenommene Kurve  $I_d = f(i)$  zeigt ebenso wie ein Vergleich zwischen den im vorausgegangenen Abschnitt angeführten Kurven  $I_d = f(V)$  für  $i = 20$  und  $50 \mu\text{Amp}$ .

17. Eine eindeutige Linearität der Beschlagsintensität mit der Stromstärke ist nicht vorhanden (Fig. 14).

Mit zunehmender Stromstärke wird die Intensität pro Einheit der Stromstärke allmählich geringer. Angeführt seien hier noch einige Messungen von Silber in Argon:

Tabelle 6

$E$ Volt	$D$ mm	$i$ $\mu\text{A}$	$p$ mm	$I_d$ $\mu\mu$
1500	2,0	20	0,07	105
1000	1,3	20	0,13	34
500	0,4	20	0,3	8
1500	1,5	40	0,115	138
1000	0,9	40	0,18	56
500	0,2	40	0,42	20
1500	1,0	60	0,13	164
1000	0,4	60	0,25	64
500	0,2	60	0,55	25
1500	0,9	80	0,155	157
1000	0,6	80	0,28	74
500	0,1	80	0,65	10

Die Ursache für dieses Verhalten könnte man entweder in den durch Dunkelraum und freie Weglänge bedingten Änderungen suchen, oder tatsächlich auf das Vorhandensein eines Elektronenstromes zurückführen.

$$\beta) I_d = f(i) \text{ für } V \cdot \lambda = \text{const.}$$

War eben die Spannung pro freie Weglänge nur näherungsweise durch das gegenläufige Verhalten von Druck und Dunkelraumdicke konstant gehalten, so wurden jetzt direkt Stromkurven aufgenommen, für die  $V \cdot \lambda = \text{const.}$  galt. Die Beschlags-

intensität als  $f(V/p)$  für  $i = \text{const.}$  aufgetragen, müßte dann geradlinig verlaufen, wenn es nur auf die Energie pro freie Weglänge ankäme.

Bei der Ausführung des Experiments wurde die freie Weglänge als umgekehrt proportional mit dem Druck angesetzt. Aufgenommen wurden Kurven für  $V/p = 5, 10, 15, 20, 22,5, 25$  und  $30 \cdot 10^3$  (Volt/mm Druck). Beobachtet wurde die Strom-

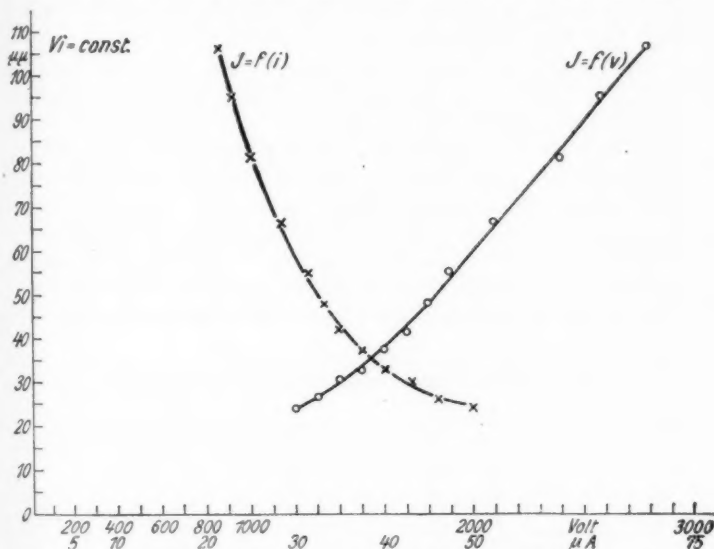


Fig. 15. Die Beschlagsintensität in Abhängigkeit von Stromstärke und Spannung für  $V \cdot i = \text{const}$  (Ag in Wasserstoff)

stärke und die Größe des Kathodendunkelraums, während die Kurven selbst als  $I_d = f(i)$  aufgetragen wurden. Die Kurven steigen aber nicht linear an, sondern biegen für große Werte von  $i$  um. Diese Tatsache ließe sich mit Hilfe des Elektronenstroms erklären. Außerdem zeigt sich aber auch eine Biegung in der Mitte, die auf das bereits diskutierte Umbiegen der Kurven  $I_d = f(V)$  mit abnehmender Spannung hinweist. — Führt man diese Kurven  $V/p = \text{const.}$  für  $i = \text{const.}$  über in Kurven  $I_d = f(V)$ , so ergibt sich natürlich derselbe Verlauf, wie er bereits durch direkte Aufnahme der Kurven  $I_d = f(V)$  erzielt wurde.

$$\gamma) V \cdot i = \text{const.}$$

Waren die bisher geschilderten Beobachtungen unter dem Gesichtspunkte der an die Kathode *abgegebenen* Energie angestellt worden, so sollte eine folgende Messung den Einfluß der *aufgewendeten* Betriebsenergie aufklären. Falls sich die bisherigen energetischen Betrachtungen bewährten, so war von vornherein keine Konstanz der Intensität zu erwarten. Tab. 7 gibt das Beobachtungsmaterial wieder, das in Fig. 15 als  $I_a = f(i)$  und  $I_a = f(V)$  aufgetragen ist.

Wir sehen mit steigender Spannung und freier Weglänge trotz abnehmender Stromstärke Intensitätszunahme. Allerdings steigt die Intensität nicht entsprechend dem Kathodenfall an, wenn man einen Vergleich zieht zu den Messungen  $I_a = f(V)$ . Das ist aber bedingt durch die entsprechend der abnehmenden Stromstärke in erhöhtem Maße eintretende Zunahme des Kathodendunkelraums. Man sieht hieraus, daß die zugeführte Betriebsenergie nicht den Kernpunkt der Kathodenzerstäubung darstellt. Andererseits zeigt die Kurve  $I_a = f(V)$  auch hier ein asymptotisches Umbiegen mit abnehmenden Spannungswerten.

Tabelle 7

V Volt	i m/A	p mm	$I_a$ $\mu\mu$
1200	50	0,45	24
1300	46	0,41	26 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>
1400	43	0,37	30
1500	40	0,33	33
1600	37,5	0,29	37 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>
1700	35	0,24	42
1800	33,33	0,20	48
1900	31,5	0,16	55
2100	28,5	0,10	66 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>
2400	25	0,087	81
2600	23	0,073	95
2800	21,5	0,062	106 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>

## 5. Abhängigkeit vom Kathodenmaterial und Gas

### a) Die bisherigen Kenntnisse

Quantitative Messungen über die Abhängigkeit der Zerstäubung vom Kathodenmaterial sind bisher von Crookes (27), Granquist (6, 7), Holborn und Austin (4) und Kohlschütter (1) ausgeführt worden. Die Untersuchungen wurden



meist in Luft, zum Teil auch in H und Ar vorgenommen. Soweit sie sich auf Luft beziehen, dürften sie von vornherein als unzuverlässig erscheinen, da sich dann im Verlaufe der Zerstäubung die Gaszusammensetzung unkontrollierbar änderte (Granquist, Holborn und Austin); außerdem können Schlüsse natürlich nur aus einem vollständigen Kurvenverlauf, z. B.  $I_a = f(V)$ , gezogen werden, und nicht aus dem für einen zufällig angenommenen Punkt ermittelten Werten (wie z. B. bei Crookes). Stellt man die Ergebnisse einmal nebeneinander, so zeigt sich, daß keines der Resultate mit einem anderen genau übereinstimmt. Aus dem gesamten Material geht nur das eine hervor: Die einzelnen Metalle zerstäuben verschieden gut; es läßt sich eine Reihenfolge in der Zerstäubbarkeit aufstellen, die sich in allgemeinen Umrissen bei den verschiedenen Untersuchungen immer wieder ergibt, die aber durch eine Anzahl unbekannter Nebenfaktoren stark beeinflußt wird.

Bisher wurden von den verschiedenen Forschern folgende Reihen (nach abnehmenden Intensitäten geordnet) gefunden:

Crookes (Luft): Pd, Au, Ag, Pb, Sn, Messing, Pt, Cu, Cd, Ni, Ir, Fe, Al, Mg.

Fischer und Hähnel (H und Ar): Ag, Pt, Cu, Ni, Fe, Al.  
Granquist (Luft): Au, Ag, Pt, Cu.

Holborn und Austin (H): Au, Ag, Pt, Pd, Cu, Ni, Ir, Rh. (Luft): Au, Ag, Bi, Pt, Pd, Ir, Sb, Rh, Ni.

Kohlschütter (O und N): Au, Cd, Ag, Pt, Cu, Fe, Al. (Ar): Cd, Ag, Au, Cu, Pt, Al, Fe. (He): Ag, Au, Cu, Cd, Pt, Fe, Al.

Eben erschienene Messungen von Güntherschulze zeigen folgenden Verlauf (H): Zn I, Cd, Ag, Au, Tl, Cu, Pd, Pb, Ni, Pt, Zn II, Rh, Sn, Co, Ir, Fe, Mo, Al, Cr, Mg, Ta, W. (O): Cd, Ag, Zn, Au, Pd, Cu, Tl, Rh, Pb, Pt, Ni, Ir, Sn, Fe, Mo, W, Co, Al, Cr, Mg, Ta.

Diese Zerstäubungsreihen können nicht in einfacher Weise mit irgend einem anderen physikalischen Gesetz in Einklang gebracht werden.

Die Abhängigkeit von der Gasart zeigt ganz entsprechende Versuchsergebnisse. Untersuchungen hierüber liegen von Crookes (27), Kohlschütter und Müller (28), Kohlschütter und Goldschmidt (29), außerdem von Fischer und Hähnel (30) vor. Die Versuche wurden zumeist mit inter-

mittierendem Strom und daher unter undefinierten Betriebsbedingungen ausgeführt. Es zeigte sich zunächst, daß der Kurvenverlauf für die einzelnen Metalle in jedem Gas derselbe war. Die Zerstäubung nahm mit dem Atomgewicht des Gases zu. Kohlschütters Messungen ergaben, daß die Größe der Unterschiede in der Zerstäubbarkeit von dem jeweils verwendeten Induktorium abhingen, und daß die Differenzen unter Umständen zum Verschwinden zu bringen waren. Fischer und Hähnel konnten ebenfalls keine Gasabhängigkeit beobachten. Als Kohlschütter seine Messungen mit Gleichstrom wiederholte, stellte er eine Gasabhängigkeit im angegebenen Sinne fest, allerdings nur für Ar und N, während H unregelmäßige Werte lieferte, und noch schwerere Gase als  $\text{Ar}(\text{SO}_2)$  keine weitere Intensitätszunahme erkennen ließen. Wie man sieht, sind auch hier die Verhältnisse experimentell noch vollkommen ungeklärt und machen neue Messungen erforderlich.

#### b) Die Versuchsergebnisse

Die Abhängigkeit von den Materialkonstanten ist in den Figg. 3, 10, 16, 17 für H ( $i = 20$  und  $50 \mu\text{Amp.}$ ), N und Ar ( $i = 20 \mu\text{Amp.}$ ) zusammengestellt. Die Kathodenmetalle waren fast ausschließlich von 12 cm Durchmesser, abgesehen von Platin und Wolfram, deren Durchmesser um 1 cm geringer war. Infolgedessen bedürfen diese Werte einer Korrektur. Die Materialien waren als chemisch rein von der Gold- und Silberscheideanstalt-Frankfurt a. M., Elektron-Griesheim, Siemens u. Halske, Heräus und Kahlbaum bezogen.<sup>1)</sup>

Die wiedergegebenen Kurvenscharen lassen erkennen:

18. *Die Beschlagsintensität in Abhängigkeit vom Kathodenfall zeigt für alle untersuchten Metalle in allen zur Anwendung gekommenen Gasen und unter allen verwendeten Betriebsbedingungen den gleichen Verlauf, wie er im vorangegangenen Kapitel für Ag in H diskutiert wurde.*

Ein Vergleich der Kurven für  $i = 20$  und  $i = 50 \mu\text{Amp.}$  in H zeigt:

1) Ein Teil dieser Materialien wurde im Chem. Laboratorium der Fa. C. Zeiss in Plattenform gegossen. Dem Leiter, Hrn. Dr. Herschkowitsch, und Hrn. Deutsch sei auch an dieser Stelle noch einmal verbindlichst dafür gedankt.

19. Für dasselbe Versuchsgas zerstäuben die verschiedenen Metalle unter verschiedenen Betriebsbedingungen in der gleichen Reihenfolge.

Vergleicht man die Zerstäubungsreihen für verschiedene Gase, so ergibt sich:

20. Die Mehrzahl aller untersuchten Metalle zerstäubt in den verschiedenen Versuchsgasen in der gleichen Reihenfolge, und zwar für Ar (nach abnehmender Intensität geordnet): Cd, Ag, Pb, Au, Sb, Sn, Bi, Cu, Pt, Ni, Fe, W, Zn, Si, Al, Mg.

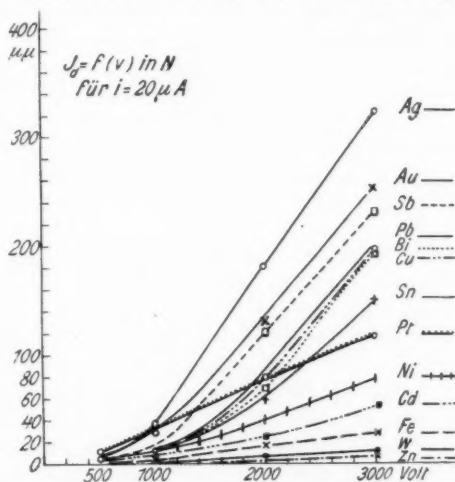


Fig 16. Die Beschlagsintensität in Abhängigkeit vom Kathodenfall für  $i = 20 \mu$  in Stickstoff

Streng erfüllt ist dieses Verhalten nur für die Edelmetalle Pt, Au, Ag, und einige andere, wie Cu, Ni, Fe, Al, Mg. Mg und Al zeigen vielleicht infolge ihrer starken Oxydbildung in allen Gasen eine sehr geringe Zerstäubung. Trotzdem wurden auch in Wasserstoff bei Spannungen von 2000 Volt wahrnehmbare Schichten gewonnen. Dabei ist die Zerstäubung für Mg offenbar geringer als für Al. Die Werte liegen in Ar etwas höher. Besondere Verhältnisse liegen für Stickstoff vor, da beide Metalle zu Nitridbildungen,  $Mg_3N_2$  und  $AlN$ , neigen. In Stickstoff hergestellte Schichten waren stets glasklar durchsichtig und konnten meist nur durch Wägung festgestellt werden. Nur an der Grenze

zwischen bestäubter und unbestäubter Fläche war eine Beobachtungsmöglichkeit durch Farbenspiel gegeben. Eine ähnliche Erscheinung wurde auch bei Pb festgestellt.

Pb zeigte auch in H ein extremes Verhalten. Die Zerstäubung weist eine weit aus dem normalen Rahmen herausfallende Intensität auf. Es muß somit mit der Möglichkeit einer Blei-wasserstoffverbindung gerechnet werden. Wasserstoffverbin-

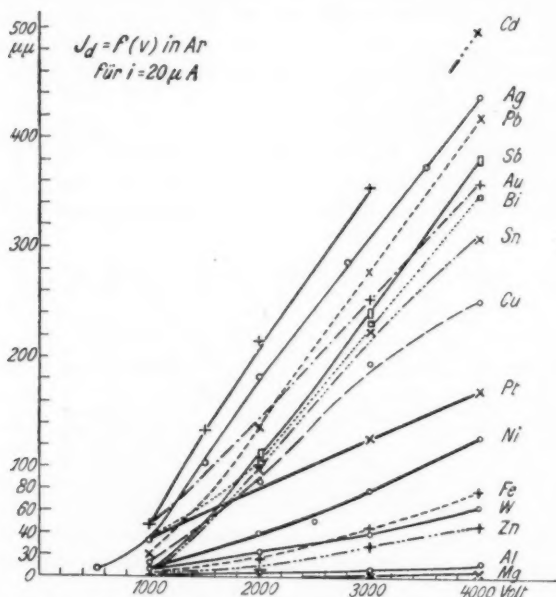


Fig. 17. Die Beschlagsintensität in Abhängigkeit vom Kathodenfall für  $i = 20 \mu$  in Argon

dungen können auch bei einer ganzen Reihe anderer Metalle auftreten, so bei Sb ( $SbH_3$ ), Si ( $SiH_4$  und andere Kombinationen). Bei Se wurde  $SeH_2$  direkt festgestellt durch seinen penetranten Geruch, der beim Öffnen der Zerstäubungsglocke in Erscheinung trat. Regelmäßige Kurven konnten im übrigen bei Se nicht erhalten werden, da bei der schlechten Wärmeleitfähigkeit die Platte baldigst zum Sieden kam, obwohl sie in eine Al-Form gegossen war. Ebenso war bei Si keine Zerstäubung zu erzielen;

bei einer festen Si-Platte setzte die Glimmentladung nicht ein, bei Si-Pulver auf leitender Unterlage zeigte die Auffangplatte nur schwache Bestäubungsflecke. Bei Sb, das gut zerstäubte und zur Hydridbildung neigt, war trotzdem am Kurvenverlauf  $I_a = f(V)$  keine Besonderheit festzustellen. Aus dem zuerst erwähnten Beobachtungsmaterial folgt immerhin:

21. Bei der Kathodenzerstäubung sind Metallgasverbindungen möglich, die die Einordnung eines Metalles in eine Zerstäubungsreihe beeinflussen können.

Einen chemischen Einfluß beobachtete auch Güntherschulze (2) in einer Arbeit, die nach Abschluß dieser Untersuchungen erschien. Es wird darauf in der dritten Mitteilung über Kathodenzerstäubungsprobleme eingegangen werden.

Eine andere sekundäre Beeinflussung der Zerstäubung zeigt sich bei einigen unedlen Metallen. So ergeben Zink und Kadmium besonders in Wasserstoff häufig sehr unregelmäßige Schichten. Gleichzeitig ist die Zerstäubung in H überhaupt sehr gering, sie steigt in N etwas an und erreicht für Cd in Ar einen Extremwert, der höher liegt als bei allen anderen Metallen. Außerdem währt bei Cd der Zerstäubungsverzug besonders lange, sofern die Kathode längere Zeit nicht benutzt wurde. Dann aber waren alle Schichten gut reproduzierbar. Wenn Zink bei ungekühlter Kathode längere Zeit mit hohen Spannungen und großen Stromstärken belastet wurde, so setzte plötzlich eine sehr intensive Niederschlagsbildung ein, die in wenigen Sekunden die Glocke völlig undurchsichtig machte. Ein besonderes Verhalten zeigte in H auch Sn. Es hat den Anschein, als ob die beobachteten guten Zerstäubungsergebnisse auf einen Verdampfungsvorgang zurückzuführen sind. Bei den Versuchen zeigte sich stets nur eine sehr schwache Zerstäubung, die nach Verlauf längerer Zeit plötzlich in eine sehr intensive Niederschlagsbildung überging. Die Kathode war inzwischen bis zum Schmelzpunkt erhitzt worden. In N und Ar setzte von vornherein eine normale Zerstäubung ein, in H zeigte außerdem Fe bei niederen Spannungen eine prozentual sehr viel geringere Zerstäubung als bei höheren. Aus allem folgt:

22. Unedle Metalle, die zur Bildung von Oberflächenschichten neigen, zerstäuben in reaktionsfähigen Gasen oft nur in sehr geringem Maße. Die Abhängigkeit der Zerstäubungsintensität vom Gas für ein und dasselbe Metall geht aus den Figg. 18—20 hervor,

in denen die Kurven  $I_a = f(V)$  für einige Metalle in H, N, Ar nebeneinandergestellt sind. Aus ihnen läßt sich ableiten:

23. Alle Metalle zeigen mit zunehmendem Atomgewicht des Gases eine stärkere Zerstäubung, sie ist am geringsten in H, am stärksten in Ar.

(Lediglich Pb verhält sich anders.) Die Werte für N liegen im allgemeinen nur wenig unter denen von Ar. Will man ein

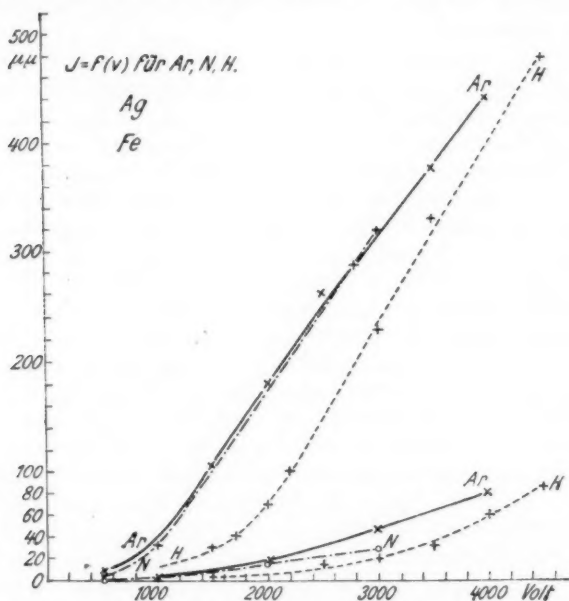


Fig. 18. Die Beschlagsintensität in Abhängigkeit vom Kathodenfall für Ag und Fe in Ar, N, H

Maß für die Änderung der Zerstäubung angeben, so kann man besonders für die Edelmetalle im Mittel eine solche mit etwa der vierten Wurzel aus dem Atomgewicht des Versuchsgases feststellen, ein Wert, dem hier keine besondere Bedeutung beigemessen werden soll. Antimon zeigte im Vergleich zu den anderen Metallen insofern ein abweichendes Verhalten, als seine Wasserstoffwerte gegenüber denen für Ar und N nur in geringem Maße differieren. Die Edelmetalle weisen die größte Differenz

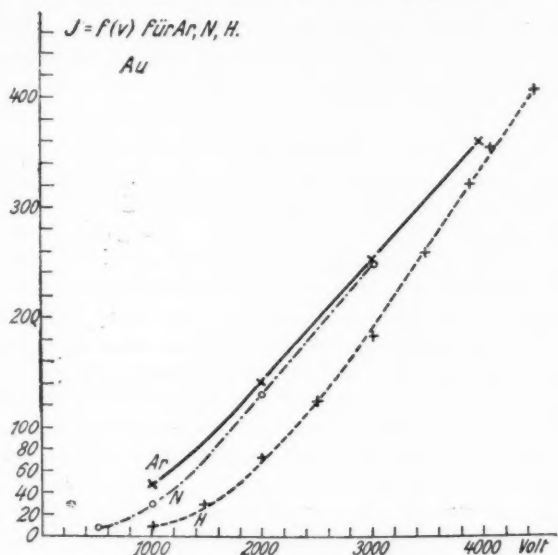


Fig. 19. Die Beschlagsintensität in Abhängigkeit vom Kathodenfall für Au in Ar, N, H

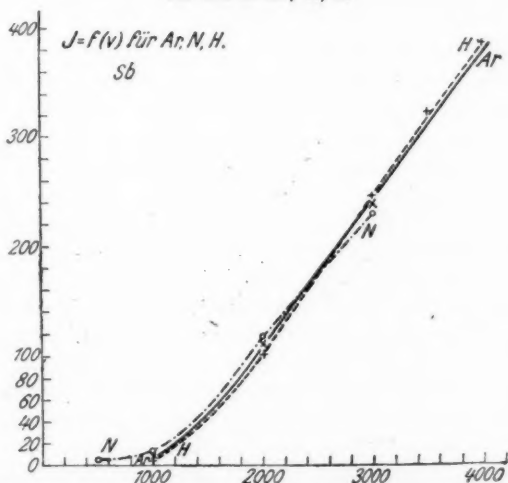


Fig. 20. Die Beschlagsintensität in Abhängigkeit vom Kathodenfall für Sb in Ar, N, H

für die einzelnen Gase in einem Druckbereich von 0,05—0,02 mm auf, während mit weiter abnehmendem Druck die Kurven sich einander wieder nähern.

### Zusammenfassung

Die Kathodenzerstäubung ist bisher theoretisch nicht geklärt und experimentell nur aus einem widerspruchsvollen und unvollständigen Beobachtungsmaterial bekannt. Die vorliegende Arbeit hatte es sich zur Aufgabe gemacht, den Vorgang der Zerstäubung ohne Rücksicht auf irgendwelche theoretische Vorstellungen in seiner Abhängigkeit von allen zugänglichen Parametern möglichst quantitativ zu untersuchen, um zunächst einmal experimentelle Klarheit zu schaffen.

Begonnen wurde mit der Beobachtung der Beschlagsintensität in Abhängigkeit von den geometrischen Daten des Zerstäubungsgefäßes, der Lage und Größe des Dunkelraums und der Kathodentemperatur. Aus den Erfahrungen dieser Versuche heraus entwickelte sich eine neue Zerstäubungsapparatur, in der die Ausbreitung des Beschlages, die Abhängigkeit der Beschlagsintensität von Druck, Spannung und Stromstärke, Gas und Kathodenmaterial an 17 Metallen in 3 Gasen geprüft wurde.

Die Hauptresultate sind:

1. Die Beschlagsintensität in Abhängigkeit von der *Zerstäubungsdauer* zeigt einen linearen Verlauf, wenn man von einer Anlaufzeit absieht.

2. Die Beschlagsintensität ist abhängig vom *Abstand Kathode—Auffangplatte*. Mit zunehmendem Abstand zeigt sich außerhalb des Kathodendunkelraums ein anscheinend exponentieller Abfall der Intensität. Eine Auffangplatte innerhalb des Kathodendunkelraums schirmt die Kathode gegen die Kanalstrahlen ab. *Blenden in der Zerstäubungsbahn* rufen ähnliche Erscheinungen hervor wie Blende nin einem entsprechenden optischen Strahlengang.

3. Eine *Temperaturabhängigkeit* der Zerstäubung besteht bei Kathodentemperaturen von 0—500° C für Ag in H nicht, sofern die gaskinetischen Verhältnisse dieselben bleiben.

4. Die Beschlagsintensität in *Abhängigkeit von der Spannung* zeigt nicht den bisher allgemein beobachteten geradlinigen Ver-



lauf; die Kurve  $I_a = f(V)$  biegt mit abnehmender Spannung asymptotisch nach der Spannungsordinate um, ohne sie an der Grenze des normalen Kathodenfalls zu schneiden. Ein oberer oder unterer Schwellenwert wurde nicht beobachtet.

5. Ein Teil der Zerstäubungspartikel kehrt zur Kathode zurück.

6. Die Metalle zerstäuben in folgender Reihe nach abnehmender Intensität geordnet: Für H: Pb, Sb, Ag, Au, Bi, Cu, Pt, Ni, Fe, Cd; für N: Ag, Au, Sb, Pb, Bi, Cu, Sn, Pt, Ni, Cd, Fe, W, Zn; für Ar: Cd, Ag, Pb, Au, Sb, Bi, Sn, Cu, Pt, Ni, Fe, W, Zn, Al, Mg.

7. In den drei untersuchten *verschiedenen Gasen* H, N, Ar nahm die Zerstäubungsintensität mit zunehmendem Atomgewicht des Gases zu.

8. Bei einzelnen Metallen treten *sekundäre Erscheinungen chemischer Natur* in der Form von Metallgasverbindungen auf.

9. Bei einigen unedlen Metallen wird die Intensität in reaktionsfähigen Gasen durch Bildung von *Oberflächenschichten* dauernd oder vorübergehend herabgesetzt.

Diese Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Jena ausgeführt. Dem Direktor des Instituts, Hrn. Geh. Rat M. Wien, bin ich für die Anregung zu diesen Untersuchungen und für sein stetes Interesse am Fortschreiten der Arbeit und die Unterstützung mit allen Mitteln des Instituts zu größtem Dank verpflichtet.

Die Arbeit wurde durchgeführt unter der speziellen Leitung von Hrn. Dr. A. v. Hippel, dem für vielfache Hilfe hier bestens gedankt sei.

Auch den folgenden Industriezweigen sei für ihr großes Entgegenkommen bei der Stellung des Versuchsmaterials der Dank ausgesprochen: Carl Zeiß, Jena, Schott u. Gen., Gold- und Silberscheideanstalt Frankfurt a. M., Linde-Eismaschinengesellschaft-Höllriegelsgreuth, Siemens u. Halske, Werner-Werk. Besonderer Dank gebührt auch der Notgemeinschaft Deutscher Wissenschaft, aus deren Mitteln die Sartoriuswaage beschafft wurde.

---

# Literaturverzeichnis

- 1) V. Kohlschütter, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. **9**. S. 355. 1912.
- 2) A. Güntherschulze, Zeitschr. f. Phys. **36**. S. 563; **37**. S. 868; **38**. S. 575. 1926.
- 3) M. Knoll, Diss. München 1923.
- 4) H. Holborn u. A. Austin, Wissensch. Abhandl. d. Phys. — Techn. Reichsanstalt IV. S. 101. 1904.
- 5) Fr. Wächter, Wied. Ann. **17**. S. 903. 1882.
- 6) G. Granquist, Oefvers. Svensk. Vetensk. Ak. Förh. **54**. S. 575. 1897.
- 7) G. Granquist, Oefvers. Svensk. Vetensk. Ak. Förh. **55**. S. 709. 1898.
- 8) J. Plücker, Pogg. Ann. **103**. S. 90; **104**. S. 116; **105**. S. 70. 1858.
- 9) A. C. Longdon, Phys. Rev. **11**. S. 40. **84**. 1900.
- 10) K. Boas, D.R.P. Nr. 82247, 6. XI. 1894.
- 11) Ch. Maurain, C. R. **141**. S. 1223. 1905.
- 12) G. Rümelin, Phys. Zeitschr. S. 1222. 1912.
- 13) G. Niese, Phys. Zeitschr. **24**. S. 12. 1923.
- 14) W. Gaede, Ann. d. Phys. **41**. S. 302.
- 15) E. Mämpel, Diss. Halle 1914.
- 16) B. Pogany, Ann. d. Phys. **49**. S. 531. 1916.
- 17) A. Riede, Ann. d. Phys. **45**. S. 881. 1914; Zeitschr. f. Phys. **28**. S. 177. 1924.
- 18) F. Rother, Dtsch. Opt. Wochenschr. Nr. 32. 1921.
- 19) F. Rother u. K. Lauch, Phys. Zeitschr. **24**. S. 462. 1923.
- 20) K. Lauch, Ann. d. Phys. **74**. S. 55. 1924.
- 21) I. Stark u. G. Wendt, Ann. d. Phys. **38**. S. 669. 1912.
- 22) O. Leithäusser, Zeitschr. f. Instrumentenkunde S. 113. 1908.
- 23) A. v. Hippel, Ann. d. Phys. **80**. S. 672. 1926.
- 24) O. Leithäusser, Dtsch. Mechaniker-Ztg. S. 239. 1907.
- 25) A. Tyndall u. H. Hughes, Phil. Mag. VI. S. 27. 1924.
- 26) I. Langmuir, Gen. Elektr. Rev. **26**, S. 731. 1923; Journ. Franklin. Inst. **196**. S. 751. 1923.
- 27) W. Crookes, Proc. Roy. Soc. **50**. S. 88. 1891.
- 28) V. Kohlschütter u. O. R. Müller, Ztschr. f. Elektrochemie **12**. S. 365. 1906.
- 29) V. Kohlschütter u. Th. Goldschmidt, Ztschr. f. Elektrochemie **14**. S. 221. 1908.
- 30) F. Fischer u. O. Hähnle, Ztschr. f. Elektrochemie **14**. S. 677. 1908.

(Eingegangen 21. Oktober 1926)

## 9. Kathodenzerstäubungsprobleme.

(III. Mitteilung)

### *Zur Theorie der Kathodenzerstäubung; von Artur v. Hippel*

#### 1. Die bisherigen Anschauungen

Kathodenzerstäubung ist Folge- und Begleiterscheinung eines Glimmstromes, eng verknüpft sind daher die theoretischen Vorstellungen über das Zerstäubungsphänomen mit dem jeweiligen Stande der Kenntnisse von den Gasentladungen. Solange die Glimmentladung für die Forschung nicht viel mehr bedeutete als eine interessante Lichterscheinung, galt die Zerstäubung als ein *Verdampfungsvorgang* (1), der — nach Hittorfs Worten (2) — „eine Folge der hohen Temperatur ist, die das Gas an der Oberfläche der Kathode schon bei mäßiger Temperatur annimmt“. Dieser *Verdampfungstheorie* stand jedoch anscheinend ein Versuch Granquists entgegen (3), der an einer glühenden Platinkathode die Unabhängigkeit der Zerstäubung von der Kathodentemperatur bewies. So lenkte man die Überlegungen in eine neue Bahn, die durch gewisse Verwandtschaftsbeziehungen zwischen Gasentladung und elektrolytischer Stromleitung gewiesen schien.

Holborn und Austin (4) und anschließend V. Kohlschütter und seine Schule (5) glaubten zeigen zu können, daß die pro Zeit- und Flächeneinheit zerstäubte Menge  $M$  als Funktion der Betriebsspannung  $V$  nach einer Art *Faraday'schem Gesetz* mit den verschiedenen Gas- und Kathodenmaterialien zusammenhinge. Sie gaben die Formulierung:

$$(1) \quad M = \frac{A}{n} \cdot C \cdot (V - V_0),$$

in der  $A$  das Atomgewicht des Kathodenmetalls,  $n$  seine Wertigkeit,  $C$  eine empirische, mit dem Füllgas wechselnde Konstante und  $V_0$  einen unteren Schwellenwert der Zerstäubung bedeutet. Von dieser Gleichung aus gelangte Kohlschütter zu seiner

*elektrochemischen Theorie*, welche die Kathodenzerstäubung als einen in erster Linie chemischen Vorgang zu begreifen suchte. Nach ihrer Auffassung sollte das Füllgas unter elektrischem Einfluß mit dem Kathodenmaterial zu endothermen, flüchtigen Metallgasverbindungen reagieren können, die bei Abkühlung an den Gefäßwänden unter Hinterlassen eines spiegelnden Metallüberzuges wieder zerfallen müßten.

Diese rein chemische Betrachtungsweise wurde durch eine rein physikalische, die *Atomstrahlentheorie* von J. Stark (6), abgelöst, die nach moderneren Vorstellungen über Gasentladungen orientiert war. In ihr wird der Aufprall der Kationen auf die Atome des Elektrodenmetalls nach den Stoßgesetzen diskutiert; Zerstäubung tritt ein, falls die übertragene Energie ausreicht, um im Rückstoß Atome aus dem Verband des massiven Metalls zu lösen. Da die Verhältnisse für eine exakte kinetische Behandlung viel zu kompliziert liegen, gelangte diese Theorie nur für die Zerstäubungsgrenze zu einer schärferen Formulierung [G. Holst (7)]<sup>1)</sup>, im übrigen aber nicht über diese allgemein gehaltene Beschreibung hinaus.

So galt bis in die jüngste Zeit hinein das Gesetz (1) als die einzige quantitative Beschreibung der Zerstäubungsvorgänge, seine experimentellen Unterlagen halten aber einer näheren Prüfung auch nicht stand. Nur durch eine recht weitgehende Extrapolation der sehr unsicheren Meßpunkte und durch Einführen neuartiger Wertigkeitsstufen gelang es, die theoretisch erstrebte Formulierung (1) einigermaßen zu begründen. Sagt man sich von den alten Vorstellungen los, so kann bei der Bildung neuer Anschauungen *dies Gesetz nicht ernsthaft in Betracht* gezogen werden.

Zur Ergänzung des Bildes sei noch auf Theorien kurz hingewiesen, welche die Kathodenzerstäubung als *grobmechanischen Zerreißvorgang* zu begreifen suchen. Berliners (8) ursprüngliche Annahme, daß eine Sprengung des Metallverbandes durch okkludierte Gase einträte, wurde neuerdings durch Bush und Smith (9) in der Weise umgedeutet, daß die in das Metall hineingeschossenen Kationen sich in Hohlräumen zu hohen Drucken anreichern und die Metallumgebung explosionsartig zerreißen

1) G. Holst überträgt weitergehend direkt die Gesetze des elastischen Stoßes auf den Zusammenprall zwischen Kation und Metallgitter-Atom. Da das Ion normalerweise nicht frei reflektiert wird und dann seine ganze Energie an die Kathode abgibt, dürfte dies Verfahren zu vereinfacht sein.

sollten. Diese Möglichkeit wurde schon durch die Untersuchungen von Stark und Wendt (10) über das Eindringen von Kanalstrahlen in feste Körper nahegelegt, die herausgeschleuderten Zerstäubungspartikel müßten dann mikrokristalline Trümmer sein. Da aber, wie der Verfasser kürzlich (11) nachweisen konnte, die primären Zerstäubungsteilchen atomarer Natur sind, kann eine *derartige Kathodensprengung höchstens als Nebeneffekt* in Frage kommen.

Der kurze Überblick zeigt, daß eine theoretische Behandlung der Kathodenzerstäubung eigentlich von vorne beginnen muß; sie muß sich eine Grundvorstellung schaffen, die als Arbeitshypothese brauchbar ist, und von ihr aus vorwärts schreitend den ganzen Fragenkomplex diskutieren bis zu exakten, experimentell prüfbaren Resultaten. Das soll im folgenden versucht und dabei jeder theoretische Schritt am Experiment kontrolliert werden.

## 2. Grundvorstellung

Die Atomstrahlentheorie ist sicher im Prinzip richtig, ihre Methode, dem unkontrollierbaren und verwickelten Energiewechselspiel zwischen Kation und Metallatomen mittels der Stoßgesetze nachzugehen, muß versagen. Hier sind statistische oder thermodynamische Methoden am Platze und anwendbar, sowie man einen Energieaustausch *jedes Kations mit einer Anzahl Metallatomen* annimmt. Unter dieser Voraussetzung ist leicht eine Brücke geschlagen zur alten Hittorfschen Theorie durch die Vorstellung, daß es sich bei der *Kathodenzerstäubung* um einen *lokalen Verdampfungsprozeß* handelt.

Momentane Überhitzung an den Aufprallstellen der Kationen soll an diesen diskreten Punkten zu einer sofort wieder abklingenden Verdampfung des Metalls führen. Diese Auffassung ist nicht nur ohne weiteres plausibel, sondern findet auch ihre *experimentelle Stütze* in der Feststellung des Verfassers (11), daß wie bei normaler Verdampfung *ungeladene Atome* von der Kathode emittiert werden. Der von Blechschmidt (12) noch einmal an Silber bestätigte Granquistsche Versuch bildet umgekehrt keinerlei Gegenargument, da eine *Temperaturerhöhung* einer Pt- bzw. Ag-Kathode auf etwa 500° gegenüber den zur Sublimation erforderlichen Temperaturen so geringfügig ist, daß man gerade *vom Standpunkte der Verdampfungstheorie* aus *keinen Einfluß* dieser Maßnahme auf die Zerstäubungsintensität erwarten darf.

Im folgenden muß es sich darum handeln:

- a) die mittlere Aufprallenergie des einzelnen Kations aus Gasart und Betriebsbedingungen zu berechnen,
- b) diese Energie mit der Zerstäubungswirkung thermodynamisch in Beziehung zu setzen und
- c) durch Summation über die Gesamtzahl der sekundlich mitwirkenden Ionen die Zerstäubungsintensität selbst formelmäßig darzustellen.

### 3. Die mittlere Aufprallenergie eines Kations

Die mittlere Aufprallenergie eines Kations läßt sich nach gaskinetischen Gesichtspunkten berechnen, falls sein Entstehungsort und der Feldverlauf in der Entladungsbahn bekannt sind. Über beide Punkte gibt die Ausbildungsform der Glimmentladung näheren Aufschluß.

Charakteristisch ist für eine Glimmentladung als selbstständige elektrische Entladungsform in verdünnten Gasen die Ausbildung eines Kathodenfalls  $K$  der Dicke  $D$ , beiderseits begrenzt durch das negative Glimmlicht bzw. die Kathode. In diesem Fallraum werden die positiven Gasionen zur Kathode hin beschleunigt und befreien aus ihr durch Stoß primäre Elektronen, die nun wiederum nach Erhalt der erforderlichen Voltgeschwindigkeit primär wie vorzüglich auch durch die hierbei ausgelösten Elektronen sekundär aus den Gasmolekeln Kationen bilden. An der oft scharf begrenzten Glimmlichtzone hat sich die negative Elektronenraumladung bis zur Kompensation der positiven Ionenraumladung gesteigert, die Feldstärke weist hier ihr Minimum auf. (13) Entsprechend wird an dieser Stelle des Gradientenminimums, in deren Nähe die Elektronen dank Rückdiffusion (14) besonders lange verweilen müssen, ein Ionisationsmaximum bestehen, die *Grenze des Kathodenfalles* ist als die vor allem in Frage kommende *Kanalstrahlquelle* anzusehen. (15) Die meisten Kationen durchheilen also den *ganzen* Kathodendunkelraum; der *Feldverlauf* auf dieser Strecke ist, falls von der möglichen Existenz einer negativen Raumladung direkt vor der Kathode abgesehen wird [vgl. Brose (16)] nach Aston (17) als *linear ansteigend* anzunehmen.

Die Aufprallenergie eines Kations setzt sich zusammen aus dem Energieanteil  $W_1$ , den es aus dem Felde auf der letzten frei durchfallenden Strecke aufnimmt, und dem Restbetrag  $W_2$ ,

den es von seinem durch Zusammenstöße gestörten Flugwege zurückbehält. Beide Teilbeträge sind für die — schon oben stillschweigend angenommene — Anordnung parallel sich gegenüberstehender Plattenelektroden leicht anzugeben:

Zählt man den Potentialverlauf in positiver  $x$ -Richtung von der Kathode ( $x = 0$ ) zur Glimmlichtgrenze ( $x = D$ ), so ist die Feldstärke  $\mathcal{E}$  an jedem Punkte des Dunkelraumes unter der Annahme  $\mathcal{E} = 0$  für  $x = D$  gegeben durch die Beziehung:

$$(2) \quad \mathcal{E} = C (D - x).$$

Die Konstante  $C$  drückt sich durch den ganzen Kathodenfall  $K$  aus:

$$(3) \quad K = C \int_0^D (D - x) dx = \frac{C D^2}{2}$$

oder

$$C = \frac{2K}{D^2}.$$

Die auf der letzten freien Weglänge  $L$  gesammelte Energie des Kations ist demnach:

$$(4) \quad W_1 = e \frac{2K}{D^2} \int_0^L (D - x) dx = e \frac{K}{D} L \left( 2 - \frac{L}{D} \right)$$

oder, da  $D$  unter den Betriebsbedingungen der Kathodenzerstäubung  $\gg L$  ist, gilt näherungsweise:

$$(4a) \quad W_1 = \frac{2eKL}{D}.$$

Zur Berechnung des Energiebetrages  $W_2$  ist die Flugbahn des Kations im Felde, die Zahl der längs ihr erfolgenden Zusammenstöße und der dabei eintretende Energieumsatz zu berücksichtigen:

Inwieweit die Kationen dem Kraftlinienzug folgen, zeigt ein Vergleich ihrer rein gaskinetischen Geschwindigkeitskomponente mit der durch das Feld bedingten Zusatzkomponente. Ein Ion, zur Zeit  $t = 0$  gebildet, bewege sich mit der gaskinetischen Geschwindigkeit  $g$  in der  $\xi - \zeta$ -Ebene eines Koordinatensystems, das mit dem Ursprung in den Ausgangspunkt 0 des Ions und mit der  $\zeta$ -Achse in die Feldrichtung gelegt sei (Fig. 1). An Stelle der unter dem Winkel  $\vartheta$  zur  $\zeta$ -Achse geneigten geradlinigen Bahn beschreibt das Ion unter

dem Feldeinfluß eine Wurfparabel, die im Mittel in der Entfernung  $L$  vom Ausgangspunkt nach der Zeit  $T$  durch Zusammenstoß endet. Bezeichnet man als „Ablenkung“  $A$  des Kations aus seiner gaskinetischen Bahn das Streckenverhältnis  $b/a$  (vgl. Fig. 1), so muß  $A \gg 1$  sein, damit von einer maß-

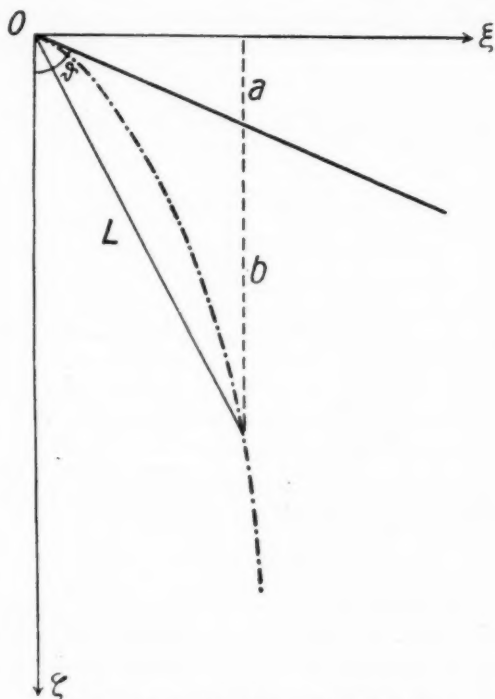


Fig. 1. Die „Ablenkung“ eines Kations

gebenden Vorzugsflugrichtung des Ions zur Kathode hin die Rede sein kann. Dies ist bei den Betriebsbedingungen der Kathodenzerstäubung der Fall.

Nimmt man überschlagsmäßig einen konstanten mittleren Feldverlauf  $\mathcal{E} = \frac{K}{D}$  an, so besteht nach den Bewegungsgleichungen für  $A$  die Beziehung:



$$(5) \quad A = \frac{e \cdot \mathcal{E} \cdot T}{2 \cdot m \cdot g \cdot \cos \vartheta},$$

wobei sich  $T$  aus der Verknüpfung mit  $L$  ergibt:

$$(5a) \quad L = \sqrt{g^2 T^2 + \frac{e^2}{4m^2} \mathcal{E}^2 \cdot T^4 + \frac{e}{m} \mathcal{E} \cdot T^3 \cdot g \cdot \cos \vartheta}.$$

Legt man der Berechnung den ungünstigsten Fall  $\vartheta = 0$  und die mittleren Betriebsdaten zugrunde: Gasdruck  $\frac{1}{10}$  mm, Gas-temperatur  $290^\circ$  abs., Feldstärke  $\mathcal{E} = 600$  Volt pro Zentimeter, und ermittelt die „Ablenkung“  $A$  für Wasserstoff und Argon, so folgt für beide etwa  $A = 13$ . Dies Resultat zeigt, daß die Ionen den größten Teil des Kathodenfalls praktisch *geradlinig in Richtung des Kraftlinienzuges* durchheilen. Experimentell wird dies durch die Tatsache bestätigt, daß sich Gegenstände, die zwischen die Kanalstrahlquelle und Kathode gebracht werden, bildgetreu auf der Kathode abzeichnen.

Die mittlere Zahl der Zusammenstöße für ein Kation im Fallraum ist entsprechend gegeben durch das Verhältnis Dunkelraumdicke zu freier Weglänge  $D/L$ , ferner sind für den Stoßverlauf die *Gasmoleküle* gegenüber den Ionen als *ruhend* zu betrachten. Der *Stoßakt* selber spielt sich, der geringen Ausbeute bei Ionenstößen entsprechend, praktisch *elastisch* ab, Umladungserscheinungen sind bei der geringen Stromdichte zu vernachlässigen.

Da die Kationen als paralleles Bündel mit einer senkrecht zur Flugrichtung konstanten Dichteverteilung den Kathodenfall durchheilen, folgt für die Häufigkeit der Zusammenstöße unter einem bestimmten Neigungswinkel  $\alpha$  der Zentrallinie Kation—Molekül zur Feldrichtung Proportionalität mit  $\cos \alpha$ . Bei jedem Stoß wird, solange man mit Kontrahenten gleicher Masse zu rechnen hat, die Normalkomponente der Geschwindigkeit ausgetauscht, der mittlere Energieverlust des Ions pro Zusammenstoß beträgt:

$$(6) \quad U = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha \sin \alpha \, d\alpha = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \cdot \frac{1}{4}.$$

Jeder Zusammenprall kostet dem Kation also ein Viertel seiner Energie<sup>1)</sup>; vom ganzen Kathodenfall behält es demnach, wenn

1) Eine entsprechende Abschätzung findet sich schon bei Güntherschulze an verschiedenen Stellen, z. B. (18).

man die relativ kleine Zunahme der Stoßzahl vernachlässigt, die durch die Ablenkungen aus der geradlinigen Flugbahn entsteht, den Bruchteil:

$$(7) \left\{ W_2 = \epsilon \frac{2K}{D^2} \left\{ \frac{3}{4} \left( Dx - \frac{x^2}{2} \right)_{x=L}^{x=2L} + \left( \frac{3}{4} \right)^2 \left( Dx - \frac{x^2}{2} \right)_{x=2L}^{x=3L} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{3}{4} \right)^{D/L} \left( Dx - \frac{x^2}{2} \right)_{x=D-L}^{x=D} \right\} \right.$$

Diese Abschätzung der kinetischen Aufprallenergie

$$(8) \quad W_k = W_1 + W_2,$$

dürfte in praxi nicht einen Mittel-, sondern näher einen oberen Grenzwert liefern. Es durchlaufen nicht alle Kationen den ganzen Dunkelraum, die Feldverteilung trägt wahrscheinlich nicht den linearen, sondern eher den von Brose (16) aus Stark-effektmessungen geschlossenen Charakter [vgl. dazu auch Güntherschulze (18)], endlich werden die Zusammenstöße nicht immer rein elastisch verlaufen. Daher erschien es erwünscht, experimentell die Brauchbarkeit des gaskinetischen Mittelwertes nachzuprüfen durch Messung der Geschwindigkeitsverteilung der aufprallenden Kationen.

#### 4. Experimentelle Ermittlung der Aufprallgeschwindigkeiten der Kationen

Zur Aufnahme der Energieverteilungskurve wurde die Methode des Gegenfeldes in der nebenstehend schematisch skizzierten Anordnung verwendet (Fig. 2). In einem Zerstäubungsgefäß von 32 cm lichter Weite befand sich gegenüber der Anode  $A$  die in der Mitte mit feinen Löchern versehene Al-Kathode  $K$  von 12 cm Durchmesser, auf einem gut abschließenden Glaszylinder  $Z$  aufliegend. In den durch  $Z$ ,  $K$  und die Glasgrundplatte  $P$  gebildeten Hohlraum ragte die als Faradaykäfig ausgebildete Sonde  $G$  von 6 cm Durchmesser und 4 mm Tiefe hinein, in etwa 5 mm Abstand von der Kathodenplatte angebracht. Der Hohlraum wurde durch die weite Rohrleitung  $L_2$  mittels einer großen Gaedeschen Stahlpumpe<sup>1)</sup> evakuiert, parallel zu ihr arbeitete ein anderes Pumpenaggregat auf den übrigen Zerstäubungsraum durch  $L_3$ , während durch  $L_1$

1) Die Stahlpumpe wurde von der Helmholtzgesellschaft zur Verfügung gestellt, wofür ich zu danken habe.

Argon als Füllgas in die Anordnung einströmte. Zwischen  $A$  und  $K$  konnte sich so ungestört die Glimmentladung ausbilden, während die durch die Bohrungen von  $K$  hindurchschießenden Ionen ohne Zusammenstöße mit Gasatomen auf die Sonde gelangten, wenn sie nicht durch das mittels Flüssigkeitspotentio-

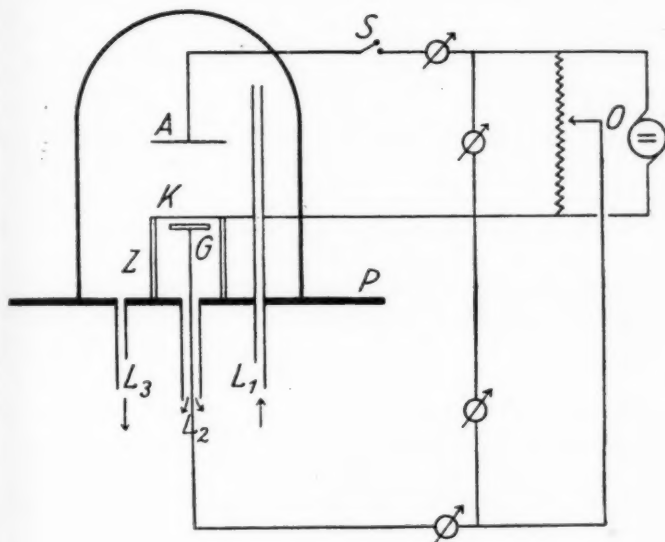


Fig. 2

Apparatur zum Messen der Aufprallgeschwindigkeit der Kationen

meter  $O$  (Borsäure-Mannitlösung) angelegte Gegenfeld zurückgeworfen wurden.

Da die auftretenden Ionenströme  $i_i$  in der Größenordnung der bei dieser umfangreichen Apparatur unvermeidlichen Kriechströme lagen, wurden alle Meßpunkte bei eingeschalteter und abgeschalteter Glimmentladung ( $S$  in Fig. 2 geschlossen bzw. geöffnet) aufgenommen und die Störungen durch Differenzbildung eliminiert. Bei hohen Gegenspannungen blieben die Kriechströme allein übrig, unbeeinflusst von der Glimmentladung, so daß sekundäre Störeffekte — etwa durch Elektronenströme — ausgeschlossen waren. Als Kathodenmaterial

diente Aluminium, das dank seiner geringen Zerstäubbarkeit auf die Isolationsverhältnisse keinen Einfluß nahm.

Das Ergebnis der Messungen ist in den nachstehenden Kurven (Fig. 3) dargestellt, für die folgende Beobachtungsdaten gelten:

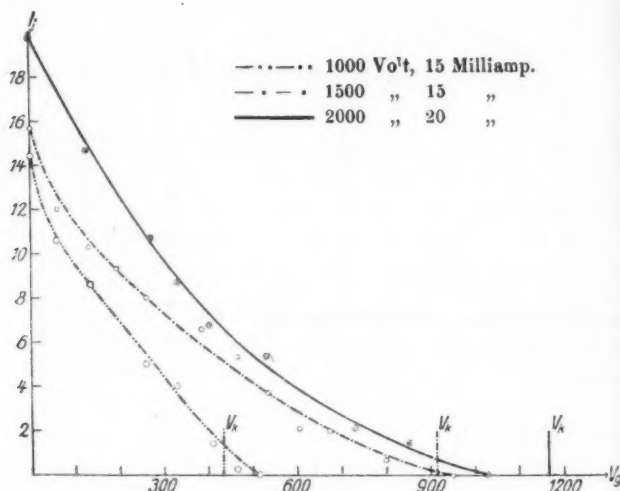


Fig. 3. Die Aufprallspannung der Kationen

Tabelle 1

Kurve	$i$ (Betriebsstrom) $\mu\text{Amp.}$	$K$ Volt	$L$ cm	$D$ cm	$W_1/\varepsilon$ Volt	$W_2/\varepsilon$ Volt	$\bar{W}/\varepsilon$ Volt
.....	15	1000	0,16	2,25	142	292	255
- . . .	15	1500	0,54	4,23	365	550	380
————	20	2000	0,60	5,36	450	710	400

Der Kurvenverlauf, Ionenstromstärke als Funktion der Gegenspannung  $V_g$  aufgetragen, zeigt, welche grobe Näherung es ist, mit einer einheitlichen gaskinetischen Geschwindigkeit der Kationen zu rechnen. Weiter folgt aus ihm das erwartete Resultat, daß die theoretische Voltgeschwindigkeit:  $\frac{W_1 + W_2}{s} = \bar{V}_k$  erheblich zu hoch liegt, um als Mittelwert in Frage zu kommen,

und mit wachsendem Kathodenfall sogar aus dem praktisch vorkommenden Geschwindigkeitsbereich völlig herausrückt. Will man als mittlere Voltgeschwindigkeit in Anlehnung an die Definition der freien Weglänge die Spannung bezeichnen, nach deren Durchlaufen die Ionenzahl auf den  $e$ -ten Teil abgesunken ist, so erhält man die in der Tabelle mit  $\bar{W}/\varepsilon$  bezeichneten Größen. Das verstärkte Zurückbleiben des praktisch vorkommenden Voltwertes hinter dem theoretischen mit steigender Kathodenfallspannung scheint auf das Anwachsen einer negativen Raumladung unmittelbar vor der Kathode zu deuten, ein Resultat, das mit der von Brose (16) gemessenen Feldverteilung im Einklang stehen würde.

### 5. Der Zusammenhang zwischen Kationenenergie und Zerstäubung

Jedes aufprallende Ion stellt an der Kathode einen Energiebetrag  $W$  als Summe seiner kinetischen und seiner Ionisierungsenergie zur Verfügung:

$$(9) \quad W = W_k + W_i.$$

Der Verbrauch kann in verschiedener Form geschehen: Der Hauptanteil  $U_1$  wird kalorisch auf die Kathode übergehen, ein Bruchteil  $U_2$  wird zum Auslösen von Elektronen dienen, ein nicht ins Gewicht fallender Anteil kann Strahlung erregen, ein Betrag  $U_3$  endlich mit dem neutralisierten Kation reflektiert werden. Über den Reflexionsverlust  $U_3$  ist wenig bekannt,  $U_2$  hingegen läßt sich bei bekannter Austrittsarbeit  $\varphi$  des Elektrodenmetalls direkt angeben, falls die pro Kation emittierte Elektronenzahl  $C_e$  ermittelt ist:

$$(10) \quad U_2 = C_e \cdot \varepsilon \varphi.$$

Aus Messungen von Badareu (19) an Platin läßt sich ersehen, daß hier — und entsprechend wohl auch bei den meisten anderen Metallen — für die Betriebsverhältnisse der Kathodenzerstäubung  $C_e$  normalerweise  $<1$  ist. Der Energiebetrag  $U_2$  spielt also bei der Gesamtbilanz kaum eine Rolle (vgl. auch unter 6).

Der Wärmeanteil  $U_1$  verursacht nach der oben skizzierten Auffassung die Kathodenzerstäubung in Form einer Sublimationserscheinung. Schlagartig wird von dem aufprallenden Ion eine kleine Zone um die Einschlagstelle hoch erhitzt, Atome

sublimieren zur Bildung einer gesättigten Metaldampfphase. Doch ein stationärer Zustand wird nicht erreicht, dauernd zieht sich durch Wärmeableitung der Radius der emittierenden Zone weiter, während ihre Temperatur sinkt und das Emissionsvermögen schwindet.

An Stelle des geschilderten Vorganges muß ein weitgehend vereinfachtes Bild treten, um die Erscheinung einer formelmäßigen Behandlungsweise zugänglich zu machen. Es soll daher angenommen werden, daß die Kationenenergie in Gleichverteilung  $z$ -Atome auf eine mittlere Temperatur  $\bar{T}$  erhitzt, dementsprechend ein Oberflächenausschnitt  $\Delta F$  für die Zerstäubung wirksam wird. Während eines kleinen Zeitmoments  $\Delta t$  soll sich über diesem Flächenstückchen Sättigungsdampfdruck einstellen und dann die Temperaturerhöhung momentan wieder verschwinden, nachdem der gleiche Zerstäubungseffekt erreicht ist, wie er tatsächlich auftritt. Diese Arbeitshypothese führt zu einem Zusammenhang zwischen  $U_1$  und der Anzahl  $P$  der durch Kationenstoß ausgelösten Metallatome über die neu eingeführten Größen  $z$ ,  $\bar{T}$ ,  $\Delta F$  und  $\Delta t$ , die dann ihrerseits wieder als Funktionen von  $U_1$  zu diskutieren sind.

$U_1$  steht, kalorisch gerechnet, mit  $z$  und  $T$  durch die Definitionsgleichung des Wärmehalts der  $z$ -Atome in der Beziehung:

$$(11) \quad U_1 = z \cdot m_a \int_{T_0}^{\bar{T}} c \cdot dT,$$

wobei  $m_a$  die Masse eines Metallatoms bedeutet, und  $T_0$  die Ausgangstemperatur der Metallkathode. Ersetzt man die spezifische Wärme  $c$  durch einen konstanten mittleren Wert  $\bar{c}$ , so ist die Temperatur des Aufprallflecks einfach gegeben durch:

$$(12) \quad \bar{T} = \frac{U_1}{z \cdot \bar{c} \cdot m_a} + T_0.$$

Zwischen  $\bar{T}$  und dem Gleichgewichtsdampfdruck  $p$  über dem Metall wird der Zusammenhang durch die Hertzsche Dampfdruckformel in der für einatomige Gase gültigen Form vermittelt:

$$(13) \quad p = a \cdot e^{-\frac{q}{R \cdot \bar{T}} \cdot \bar{T}^{-\frac{1}{2}}},$$

wenn  $q$  die auf den absoluten Nullpunkt bezogene Verdampfungswärme pro Mol,  $R$  die Gaskonstante und  $a$  eine Integrations-

konstante bezeichnet. Aus Gl. (13) folgt die Atomzahl  $N$  im Kubikzentimeter des Metallgases:

$$(14) \quad N = \frac{p}{k \bar{T}}$$

und aus ihr wiederum  $N'$ , die sekundlich von der auf  $\bar{T}$  erhitzten Flächeneinheit unter Maxwell'scher Geschwindigkeitsverteilung emittierte Anzahl Metallatome:

$$(15) \quad N' = N \cdot \sqrt{\frac{k \cdot \bar{T}}{2\pi m_a}}.$$

Diese Größe, multipliziert mit dem Oberflächenfaktor  $\Delta F$  und dem wirksamen Zeitmoment  $\Delta \bar{t}$ , gibt die gesuchte Zahl  $P$  der

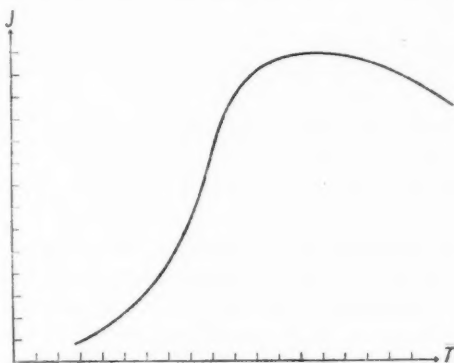


Fig. 4

durch einen Kationenstoß ausgelösten Zerstäubungspartikel, die jedoch noch keineswegs identisch zu sein braucht mit der endgültig aus der Kathode emittierten Atomzahl (vgl. unten). Für  $P$  lautet demnach der Endausdruck:

$$(16) \quad P = A \cdot \bar{T}^{-1} \cdot e^{-\frac{q}{R \cdot \bar{T}}} \cdot \Delta F \cdot \Delta \bar{t}.$$

In dieser Gleichung kommt die Temperaturabhängigkeit noch nicht rein zum Ausdruck, weil  $\Delta F$  und  $\Delta \bar{t}$  die Temperatur implizite enthalten. Dieser Einfluß läßt sich aber qualitativ abschätzen. Mit steigender Kationenenergie  $U_1$  wächst die am Emissionsakt teilnehmende Atomzahl  $z$ , dadurch steigt  $\bar{T}$  lang-

samer an als nach Gl. (12) für  $z = \text{const}$  zu erwarten. Gleichzeitig steigt aber auch  $\Delta F$  und  $\Delta \bar{z}$  anfangs an und wirkt im gegenläufigen Sinne, so daß der Zusammenhang zwischen  $U_1$  und  $P$  — graphisch dargestellt — einen steil exponentiellen Anstieg nimmt, wie ihn etwa für die Glühelektronenemission die Richardsonsche Kurve zeigt. Für hohe Aufprallgeschwindigkeiten umgekehrt verlagert sich die Kationenwirkung immer mehr in die Tiefe, mit einer Zunahme von  $z$  geht eine Abnahme der wirksamen Oberfläche  $\Delta F$  Hand in Hand und führt zu einem verlangsamten Anstieg, ja zu einer Umkehr des Kurvenverlaufes (Fig. 4).

Bei welchen Kationengeschwindigkeiten der fallende Teil der Charakteristik erreicht wird, läßt sich a priori nicht sagen und wird in gewissen Grenzen von den Eigenschaften des Elektrodenmetalls abhängen. Als *unterer Schwellenwert* der Zerstäubung folgt aus der thermodynamischen Ableitung der Wert von  $U_1$ , für den die auf das Atom entfallenden Energiebeträge noch die Größe der atomaren Sublimationswärme  $w_a$  erreichen. Zu diesem Grenzwert kommt man natürlich auch, wie Holst (7) gezeigt hat, von der Starkschen Stoßtheorie aus.

#### 6. Gesamtstrom und Zerstäubungsintensität

Die durch Gl. (16) gegebene Zerstäubungswirkung des Einzelions, multipliziert mit der sekundlich auf die Flächeneinheit aufprallenden Kationenzahl  $n_i$ , ergibt die *Gesamtzahl der in der Zeiteinheit aus der Flächeneinheit ausgelösten Metallatome*, die Zerstäubungsintensität  $I$ . Auf diese Definition sei hier ausdrücklich aufmerksam gemacht, da sich alle bisherigen Deutungsversuche der Kathodenzerstäubung auf den tatsächlichen Gewichtsverlust der Kathode  $Q$  beziehen, der mit  $I$  keineswegs parallel läuft. Wie später unter 7. ausführlicher gezeigt wird, kehrt der Hauptanteil des zerstäubten Metalls durch Diffusion zur Kathode zurück; daher werden in  $Q$  schon Sekundärfaktoren mitgemessen, die den eigentlichen physikalischen Vorgang verschleiern und durch Umrechnung der experimentellen Resultate auf die Zerstäubungsintensität  $I$  eliminiert werden müssen.

Die Kationenanzahl  $n_i$  bestimmt sich aus der gemessenen Stromdichte  $i$  nach Abzug des Elektronenstromanteils, der durch den Ionenaufprall ausgelöst wird. In Analogie zur thermischen Theorie der Kathodenzerstäubung muß man diesen



Auslösevorgang als *Glühelktronenemission* deuten, die von dem auf die Temperatur  $\bar{T}$  erhitzten Flächenelement  $\Delta F$  während der Zeit  $\Delta \bar{t}$  ausgeht. Die pro Ionenstoß frei gemachte Elektronenzahl  $C_e$  muß dementsprechend als Funktion der Aufprallenergie eine Charakteristik zeigen, die vollkommen der in Fig. 4 gegebenen Zerstäubungskurve ähnelt; für die einzelnen Metalle wird sie sich vor allem nach der Größe der Austrittsarbeit  $\varphi$  unterscheiden gemäß der Richardsonschen Beziehung. So gilt:

$$(17) \quad C_e = A' \cdot \sqrt{\bar{T}} \cdot e^{-\frac{\varphi}{k \cdot \bar{T}}} \cdot \Delta F \cdot \Delta \bar{t}.$$

Die experimentellen Unterlagen für die Größe und den Verlauf von  $C_e$  sind noch recht unzureichend (20). Für die vorausgesagte Kurvenform sprechen Messungen von Cheney (21) bei kleinen Voltgeschwindigkeiten, die sich im Sinne einer exponentiellen Anfangscharakteristik deuten lassen, sowie Beobachtungen von Campbell (22) und anderen, die eine Abnahme der Ausbeute bei hohen Voltgeschwindigkeiten feststellen.<sup>1)</sup> Über die Größenordnung des Effektes sind die Meinungen noch recht geteilt, die Versuchsbedingungen auch oft nicht vergleichbar. Die saubersten direkten Messungen lassen erwarten, daß günstigstenfalls kaum vor 1500 Volt Kationengeschwindigkeit  $C_e$  den Betrag 1 erreichen dürfte, während nach Energieverteilungsmessungen in der Glimmentladung Güntherschulze (18) kürzlich zu erheblich niedrigeren Werten gelangt.

Für die Kationenanzahl  $n_j$  gilt nach allem die Beziehung:

$$(18) \quad n_j = \frac{i}{e \cdot (1 + C_e)}$$

und damit für die Zerstäubungsintensität  $I$  die *Endgleichung*:

$$(19) \quad I = \frac{i}{e(1 + C_e)} A \bar{T}^{-1} \cdot e^{-\frac{\varphi}{R \bar{T}}} \cdot \Delta F \Delta \bar{t}.$$

1) *Anmerkungen bei der Korrektur*: H. Baerwald (Ann. d. Phys. 65. S. 178. 1921) hat, wie der Verfasser nachträglich feststellte, eine Kurve für die Sekundärstrahlung aus den damals vorliegenden Messungen entnommen, die dem durch (17) gegebenen Kurvenverlauf entsprechen würde. Ferner weist J. Hahn (Z. f. Phys. 14. S. 368. 1923) darauf hin, daß seine Kurven für die Auslösung von Sekundärelektronen beim Durchgang von Kanalstrahlen durch feste Körper sehr ähnlich dem nach dem Richardsonschen Gesetz zu erwartenden Anstieg exponentiell verlaufen. Im Gebiet der  $\alpha$  Strahlen hat A. Becker (Ann. d. Phys. 75. S. 217. 1924) den Parallelismus zwischen Glühelktronenemission und Sekundärstrahlung näher verfolgt.

In ihr wird eine Vernachlässigung des Elektronenstromes —  $C_e = 0$  — nicht die Kurvenform völlig ändern, aber mit wachsendem  $\bar{T}$  die Punkte zu tief legen und so zu früh den Eindruck des Umbiegens hervorrufen.

### 7. Die Ausbreitung der Zerstäubungspartikel

In Gl. (19) ist der eigentliche physikalische Inhalt des Zerstäubungsvorganges formuliert. Direkt der Messung zugänglich ist aber normalerweise nicht die Zerstäubungsintensität  $I$ , die Emission der Kathode im Hochvakuum, sondern ein Dank

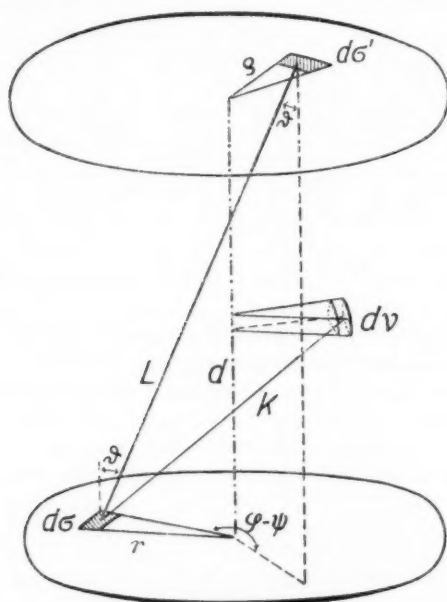


Fig. 5

der Anwesenheit des Füllgases verkleinerter Gewichtsschwund  $I'$ . An Stelle dessen wird oft besser (12) die Beschlagsdichte  $I_b$  einer Auffangplatte als Kriterium der Zerstäubungsintensität benutzt. Um aus einer dieser Größen wieder rückwärts auf  $I$  zu schließen, muß man die Ausbreitung der Metallteilchen im Gasraum näher verfolgen.

## a) Der Hochvakuumfall

Ein im Metallverbände gleichmäßig gebundenes Atom wird, thermisch hoch erregt, mit einer Wahrscheinlichkeit den festen Zustand verlassen, die mit dem Kosinus des wachsenden Neigungswinkels zwischen seiner Bewegungsrichtung und der Flächennormale sinkt. Dieser Gesichtspunkt, unterstützt durch Beobachtungen über die Beschlagsausbreitung, macht es vom Standpunkt der Verdampfungstheorie aus plausibel, das *Lambertsche Kosinusetz* für die vom Füllgas ungestörte Beschlagsausbreitung als gültig anzunehmen.

Für die Umrechnung der Beschlagsdichte  $I_b$  auf  $I$  gilt dann folgende Überlegung: Gegeben sei, wie schon oben, eine plattenförmige Elektrodenanordnung; zwischen der kreisrunden Kathode vom Radius  $a$  mit den Polarkoordinaten  $r$  und  $\varphi$  und der Anode sei eine Auffangscheibe (Polarkoordinaten  $\varrho$  und  $\psi$ ) im Abstand  $d$  von der Kathode parallel und zentriert eingeschoben. Bedeutet  $K$  die Zerstäubungsintensität in der Normalen,  $l$  die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Flächenelemente  $d\sigma \rightarrow d\sigma'$  (vgl. Fig. 5), so folgt als Zerstäubungswirkung von  $d\sigma$  auf  $d\sigma'$ :

$$(20) \quad J' = K \cdot d\sigma d\sigma' \frac{\cos^2 \vartheta}{l^2} = K d\sigma d\sigma' \frac{d^2}{(r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos(\varphi - \psi) + d^2)^2}.$$

Die Gesamtwirkung der Kathode auf das Element  $d\sigma'$  beträgt:

$$(21) \quad J = K d\sigma' d^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^a \frac{r dr d\varphi}{(r^2 + \varrho^2 + d^2 - 2r\varrho \cos(\varphi - \psi))^2},$$

wobei die Integration über den Winkel ergibt:

$$(21a) \quad J = K d\sigma' d^2 \cdot 2\pi \int_{r=0}^a \frac{(r^2 + \varrho^2 + d^2) r dr}{\{(r^2 + \varrho^2 + d^2)^2 - 4r^2\varrho^2\}^{1/2}}$$

und die Integration über den Radius:

$$(21b) \quad J = K d\sigma' \frac{\pi}{2} \left[ \frac{a^2 - d^2 - \varrho^2}{\sqrt{(a^2 + d^2 + \varrho^2)^2 - 4a^2\varrho^2}} + 1 \right].$$

Es folgt als Bestäubungsintensität auf eine Auffangscheibe vom Radius  $\varrho_0$ :

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} I_b &= K \frac{\pi}{\varrho_0^2} \int_{\varrho=0}^{\varrho_0} \varrho d\varrho \left[ \frac{a^2 - d^2 - \varrho^2}{\sqrt{(a^2 + d^2 + \varrho^2)^2 - 4a^2\varrho^2}} + 1 \right] \\ &= \frac{K\pi}{2\varrho_0^2} \left\{ a^2 + d^2 + \varrho_0^2 - \sqrt{(a^2 + d^2 + \varrho_0^2)^2 - 4a^2\varrho_0^2} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Für  $\varrho_0 = \infty$  ergibt sich natürlich die oben definierte Gesamtintensität:

$$(23) \quad I = K\pi.$$

#### b) Das Ausbreitungsgesetz im Füllgas

Der Störeinfluß des Füllgases macht sich auf zweierlei Weise bemerkbar, er schwächt den primären Ausbreitungsvorgang und überlagert  $I_b$  durch einen Diffusionsanteil  $I_d$ .

Jeder durch Gl. (20) dargestellte geradlinige Zerstäubungsstrahl wird durch Zerstreuung exponentiell geschwächt, es gelangt von  $d\sigma$  nach  $d\sigma'$  also nur der Bruchteil:

$$(24) \quad J'_d = K d\sigma d\sigma' \frac{\cos^2 \vartheta \cdot e^{-\frac{d}{\lambda}}}{r^2}.$$

Die Integration dieser modifizierten Gleichung läßt sich nicht mehr geschlossen durchführen, doch kann man die Gesamtwirkung der Kathode auf die Auffangplatte durch Annahme eines konstanten Exponentialgliedes in die Grenzen einschließen:

$$(25) \quad \left\{ \frac{K \cdot \pi}{2 \varrho_0^2} \left\{ a^2 + d^2 + \varrho_0^2 - \sqrt{(a^2 + d^2 + \varrho_0^2)^2 - 4 a^2 \varrho_0^2} \right\} \cdot e^{-\frac{d}{\lambda}} > J'_d > \frac{K \cdot \pi}{2 \varrho_0^2} \left\{ \right\} \cdot e^{-\frac{\sqrt{a^2 + d^2}}{\lambda}} \right\}.$$

Die Berechnung des Diffusionsgliedes macht es erforderlich, von der bisher benutzten optischen Analogie abzugehen und, ähnlich wie in einer früheren Arbeit des Verfassers (11), die Elektroden als genügend ausgedehnt gegenüber Auffangplattengröße und -abstand zu betrachten, um das Problem als lineares behandeln zu können. In der  $x$ -Richtung senkrecht zur Plattenebene, von der Kathode  $x = 0$  aus gerechnet, bildet sich dann gemäß der oben definierten Zerstreuung ein Dichtegefälle des Metaldampfes aus, das im ersten Augenblick den Gradienten zeigt:

$$(26) \quad \frac{dE}{dx} = K\pi e^{-\frac{x}{\lambda}} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

und einem Druckgefälle entspricht:

$$(26a) \quad \frac{dp}{dx} = \frac{3}{2\lambda_1^2} \frac{dE}{dx}.$$

$$\begin{array}{l}
 N = \text{sekundlich durch die Querschnittseinheit} \\
 \text{tretende Anzahl,} \\
 \Omega_1 = \text{mittlere Geschwindigkeit,} \\
 m = \text{Masse}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} N \\ \Omega_1 \\ m \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{der} \\ \text{Metall-} \\ \text{atome.} \end{array}$$

Gemäß dieser Druckverteilung setzt eine Diffusion ein:

$$(27) \quad -D \frac{dp}{dx} = \frac{1}{3} N \cdot m \Omega_1^2$$

die alsbald, da der Diffusionskoeffizient  $D = \frac{\pi}{8} \lambda \Omega_1$  wegen der geringen Dichte des Metaldampfes gegenüber dem Füllgas im Gasraum konstant ist, zur Herstellung eines linearen Druckabfalles, d. h. zum Verschwinden des Exponentialgliedes in Gl. (26) führt. Die Grenzbedingungen, die den sekundlich durch die Querschnittseinheit fließenden Diffusionsstrom  $Nm = I_d \cdot m$  endgültig festlegen, lauten:  $p = 0$  an der Auffangplatte, denn jedes aufrallende Metallteilchen soll absorbiert werden, und  $p = p_k$  an der Kathode. Dabei ergibt sich  $p_k$  durch Integration von Gl. (27) als:

$$(28) \quad p_k = \frac{J_d \cdot 8 \Omega_1 d \cdot m}{3 \pi \lambda}.$$

Der Dampfdruck vor der Kathode ist aber noch durch eine zweite Bedingung festgelegt; unter seinem Einfluß wird die Kathodenoberflächeneinheit sekundlich von  $p_k \cdot \Omega_1 / 4kT$  Atomstößen des Metallgases getroffen, von denen ein Bruchteil  $c_1$  zur Absorption der betreffenden Metallatome führt. Da im ganzen pro Zeiteinheit und Flächeneinheit  $K \cdot \pi$ -Atome emittiert werden, muß also die Bilanz gelten:

$$(29) \quad K\pi - c_1 \frac{p_k \cdot \Omega_1}{4kT} = I_d + J_b.$$

Nach Einsetzen von Gl. (28) und Umformen folgt für  $I_d$  der Endausdruck:

$$(30) \quad I_d = \frac{K \cdot \pi - J_b}{\left\{ 1 + c_1 \frac{2d}{\pi \lambda} \right\}}.$$

Da nach Gl. (25)  $I_b \ll K\pi$  und ebenso  $\frac{d}{\lambda} \gg 1$  unter den normalen Betriebsbedingungen der Kathodenzerstäubung, da ferner  $c_1$  sich nicht beträchtlich von 1 unterscheiden dürfte, wird im allgemeinen die Näherungsformel genügen:

$$(30a) \quad I_d = \frac{K \pi^2 \cdot \lambda}{2d}.$$

Die Folgerung aus Gl. (30a), daß sich die Bestäubungsintensität der Auffangplatte umgekehrt proportional mit ihrem Abstand zur Kathode ändert, läßt sich an den Messungen von

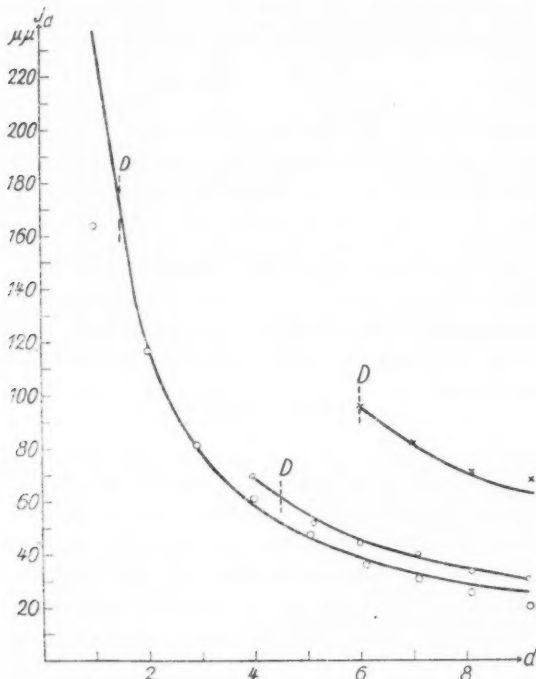


Fig. 6

Beschlagsdichte als Funktion des Abstandes: Kathode-Auffangplatte

Bleichschmidt (12) (Fig. 8) kontrollieren.<sup>1)</sup> Die dort festgelegten Punkte sind in der nachstehenden Fig. 6 neben den

1) In einer eben erschienenen Arbeit von Güntherschulze (29) wird die durch (30a) geforderte Beziehung zum Gasdruck und Plattenabstand ebenfalls empirisch gefunden. Seine danach aufgestellte Formel für den Gewichtsverlust der Kathode:  $Q = \frac{C \cdot K}{d \cdot p}$  steht mit ihrer linearen Beziehung zwischen  $Q$  und dem Kathodenfall  $K$  im Gegensatz zu den Messungen von Bleichschmidt (12) und zu dieser Theorie, die auf einen sehr viel komplizierteren Zusammenhang [vgl. Gleichung (19)] hinweisen.

zu ihnen berechneten Hyperbeln eingetragen; die Übereinstimmung ist völlig befriedigend. Daß bei der untersten Kurve an den Enden die Meßwerte unter den berechneten liegen müssen, wird ohne weiteres aus der Lage der Dunkelraumsgrenze  $D$  verständlich bzw. aus dem großen Abstand der Auffangplatte, für den das Diffusionsproblem nicht mehr als völlig linear anzusehen ist.

#### 8. Die Zerstäubungsintensität als Funktion der Betriebsbedingungen;

##### Vergleich zwischen Theorie und Experiment

Die Theorie hatte aus Gleichung (19) gefolgert, daß keine Proportionalität zwischen Zerstäubungsintensität und Ionen-aufprallenergie bestehe, vielmehr anfänglich ein exponentieller Anstieg, mit wachsender Tiefenwirkung ein Umbiegen der Kurve und langsamer Abfall zu erwarten sei. Gleichung (30a) ermöglicht eine Berechnung der Zerstäubungsintensität aus der Beschlagsdichte der Auffangplatte und damit eine Kontrolle der theoretischen Voraussage an den von Blechschmidt (12) erhaltenen Kurven. Zu beachten ist jetzt allerdings, daß die Umrechnung der Meßpunkte im Abszissen- wie Ordinatenmaßstab auch noch die Unsicherheiten zur Geltung bringt, die der Bestimmung von Druck und Dunkelraumdicke anhaften. Experimentell sind folgende *Maximalfehlergrenzen* kaum zu unterschreiten:

$$D \frac{1}{2} \text{ mm}; \quad p \ 5\%; \quad i \ 5\%; \quad K \ 25 \text{ Volt.}$$

Nach der unter 4. beschriebenen experimentellen Untersuchung ist der gaskinetisch errechnete Wert der Kationen-aufprallenergie zu groß. Trotzdem soll er in Ermangelung eines theoretisch richtigen Energiewertes im folgenden benutzt werden, da er nur eine mit wachsenden Voltbeträgen steigende Dehnung des Abszissenmaßstabes, also keine prinzipielle Änderung der Kurvengestalt, hervorruft. Mit derselben Begründung kann bei der Kurvendarstellung für die unabhängige Variable  $\bar{T}$  der Gleichung (19) direkt die Voltspannung  $V_k$  der aufprallenden Kationen eintreten. Der *Elektronenstromanteil* am Gesamtstrom soll in den folgenden Figuren nicht berücksichtigt werden, um nicht neue Unsicherheiten, da zu seiner Berechnung noch die exakten Unterlagen fehlen (vgl. oben), hineinzutragen.

Fig. 7a und 7b zeigen den Verlauf der 50 bzw. 20 Milliamperekurven für Silber und Gold in Wasserstoff. Der Kurven-

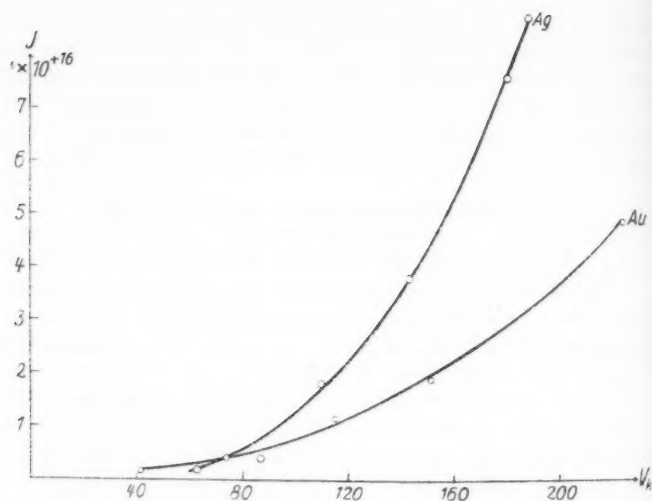


Fig. 7a. Zerstäubungsintensität von Silber und Gold in Wasserstoff (Betriebsstrom 50 Milliamp.)

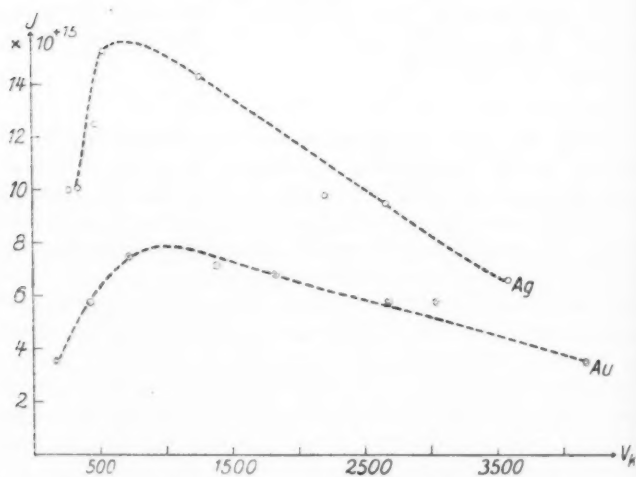


Fig. 7b. Zerstäubungsintensität von Silber und Gold in Wasserstoff (Betriebsstrom 20 Milliamp.)



gang entspricht in seinem exponentiellen Anstieg vollkommen den theoretischen Erwartungen, der Abfall wird durch den hinzutretenden Elektronenstrom vorgetäuscht sein. Auffällig erscheint im übrigen, daß sich die Charakteristik für 50 Milliampere in ihrem mit der 20 Milliamperekurve koinzidierenden Spannungspunkt auch nicht näherungsweise unter der Annahme, daß die Zerstäubungsintensität proportional mit der Stromdichte ansteigt, auf diese umrechnen läßt. Dafür kann

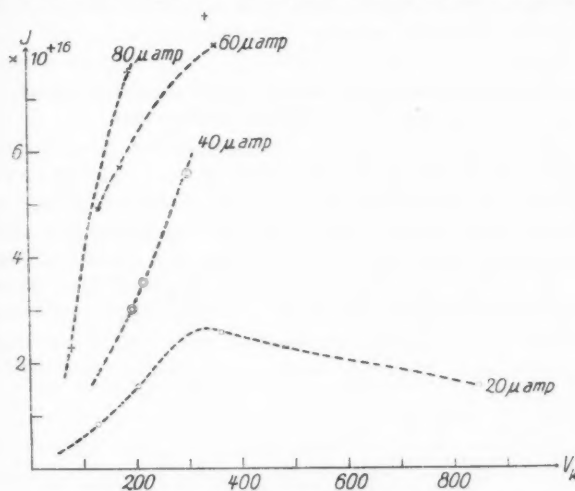


Fig. 8. Stromstärkebeziehung im Argon

man wohl nicht nur die Unsicherheit in der Spannungsabszisse verantwortlich machen, sondern hat an sekundäre Komplikationen zu denken, die mit wachsender Stromdichte und entsprechend steigendem Druck an Einfluß hervortreten. So bilden sich z. B. nach Untersuchungen von Smyth (23) durch Elektronenstoß im Wasserstoff bei höheren Drucken  $\text{H}^+$ - und  $\text{H}_3^+$ -Ionen, die beide, das erstere durch seine chemische Aktivität (vgl. unten), das andere durch seine größere Masse, die Zerstäubungsintensität vergrößern würden.

Der Zusammenhang zwischen Zerstäubungsintensität und Stromstärke muß reiner folgen aus Meßkurven in einem Edelgas. Hier liegen Messungen von Blechschmidt (12) im Argon

vor (vgl. Bechschmidt, Tab. 6), deren Daten, wenn man Proportionalität zwischen Stromstärke und Beschlagsdichte bei konstantem Kathodenfall erwartet, geradezu widersinnig erscheinen. Nach (30a) umgerechnet erhält man die Darstellung in Fig. 8, in der jetzt das krasse Überschneiden der beiden obersten Stromstärkekurven verschwunden ist und eine Proportionalität zwischen Stromstärke und Zerstäubungsintensität innerhalb der sehr erheblichen Fehlergrenzen — die Dunkelraumdicke und damit die Lage der Kurvenpunkte ist bei den niedrigsten Voltwerten bis auf 50% unsicher — möglich wird.

#### 9. Eine obere Grenze für die Zerstäubungsintensität bei gegebenen Betriebsbedingungen

Gleichung (19) vermag nur den *qualitativen* Zusammenhang zwischen Zerstäubungsintensität und Betriebsbedingungen anzugeben, weil einige der in ihr enthaltenen Faktoren nicht nach absoluter Größe bekannt sind. Aus den ihr zugrunde liegenden Vorstellungen folgt aber ohne weiteres ein oberer Grenzwert für  $I$ , wenn man sich den thermisch verfügbaren Energieanteil  $U_1$  zur Verdampfung von Atomen völlig ausgenutzt denkt. Wird mit  $w_a$  die Sublimationswärme eines Atoms bezeichnet, so gilt demnach für den „maximalen Zerstäubungswert“ die Bedingung:

$$(31) \quad I_{\max} = \frac{i}{e(1 + U_e)} \cdot \frac{U_1}{w_a}.$$

Diese Beziehung liefert einen recht brauchbaren Anhalt für die Größenordnung des zu erwartenden Effektes, wie an zwei beliebig herausgegriffenen Beispielen für Silber als Kathodenmaterial gezeigt sei.

Tabelle 2

Gas	$i$ $\mu\text{Amp.}$	$V_k$ Volt	$D$ cm	$I_{\max} \cdot w_a$ cal	$I_d$ $\mu\mu$	$I \cdot w_a$ cal	$I/I_{\max}$ %
Ar	0,18	127	0,43	$5,4 \cdot 10^{-3}$	8	$1,05 \cdot 10^{-3}$	19,3
H <sub>2</sub>	0,18	482	2,7	$1,8 \cdot 10^{-2}$	69	$1,5 \cdot 10^{-3}$	8,4

Die experimentell aufgewandte Verdampfungswärme  $I \cdot w_a$ , aus  $I_d$  nach (30a) ermittelt, ist in der letzten Spalte der maximal zur Verfügung stehenden gegenübergestellt. In der zweiten Zeile der Tabelle würde diese prozentuale Energieausnutzung

noch günstiger aussehen, wenn der Elektronenstrom und der Umstand berücksichtigt würde, daß  $V_k$  mit wachsenden Werten immer stärker den experimentell gemessenen Größen voraneilt.

*Der Wirkungsgrad des primären Prozesses der Atomauslösung durch Kanalstrahlstoß ist also ein außerordentlich guter.* Für den Beobachter der Zerstäubungsintensität tritt er normalerweise nicht direkt in Erscheinung, da der weitaus größte Teil aller frei gemachten Atome bei dem gegen die freie Weglänge großen Abstand von Auffangplatte und Gefäßwänden durch Diffusion zur Kathode zurückkehrt. Nach (30a) berechnet sich für die Tabellenwerte und einen Abstand der Auffangplatte von 5,5 cm dieser zurückdiffundierende Prozentsatz für den ersten Fall zu 99,5 Proz., für den zweiten zu 97,8 Proz. Allen Rechnungen ist dabei, wie schon oben, als freie Weglänge an Stelle des unbekannten Wertes für das Metallatom im Füllgas die des Füllgasatoms bzw. Moleküls im Füllgas zugrunde gelegt.<sup>1)</sup> Würde die Auffangplatte bis auf den kleinstmöglichen Abstand, die Falldicke  $D$ , an die Kathode herangeschoben, so würden immer noch etwa 93 Proz. aller ausgelösten Metallteilchen durch Diffusion zur Kathode zurückgezwungen.

#### 10. Zerstäubungsintensität und Kathodenmaterial

Aus der Grundidee der hier vorgelegten thermischen Theorie folgt, daß die Rolle eines Kathodenmaterials beim Zerstäubungsprozeß im wesentlichen durch seine *Sublimationswärme* bestimmt wird. Nach Gleichung (19) tritt als *sekundärer Gesichtspunkt* neben diesen im Exponentialglied wirksamen Faktor die *Austrittsarbeit für die Elektronen*, die den Ionenanteil

1) Diese Annahme einer einheitlichen Weglänge für die verschiedenen Metalle kann natürlich zu erheblicheren Fehlern in den quantitativen Resultaten Anlaß geben, doch fehlen bisher noch fast überall die Daten für den Radius des ungeladenen Metallatoms, die etwa eine Berechnung von  $\lambda$  nach dem Maxwellschen Ausdruck gestatten würden. Nur für Silber liegt nach Kenntnis des Verfassers eine ziemlich gesicherte Bestimmung des Atomradius vor (s. F. Bilz, Zeitschr. f. Phys. 32, S. 81. 1925), nach der sich die Maxwellsche Weglänge  $\lambda_m$  ergeben würde: Argon  $\lambda_m = \lambda_{\text{Argon}} 1,36$ ;  $\text{H}_2$   $\lambda_m = \lambda_{\text{H}_2} \cdot 1,14$ . Entsprechend ändern sich die Endwerte in Tabelle 2:  $I/I_{\text{max}}$  Ar = 14,2 Proz;  $\text{H}_2$  = 7,4 Proz. und der zur Kathode zurückkehrende prozentuale Anteil der Metallatome: 99,4 Proz. bzw. 96,9 Proz.

des Betriebsstromes mitbestimmt, sowie in gewissen Grenzen die *Wärmeleitfähigkeit* und die *Gitterstruktur* des Metalls, die auf die *Energiebilanz* und die *Eindringtiefe* des Kations rückwirken. Es ist demnach zu erwarten, daß für den steil ansteigenden Teil der Intensitätskurven nach (19) die *Reihenfolge der Metalle nach steigender Zerstäubbarkeit im allgemeinen*

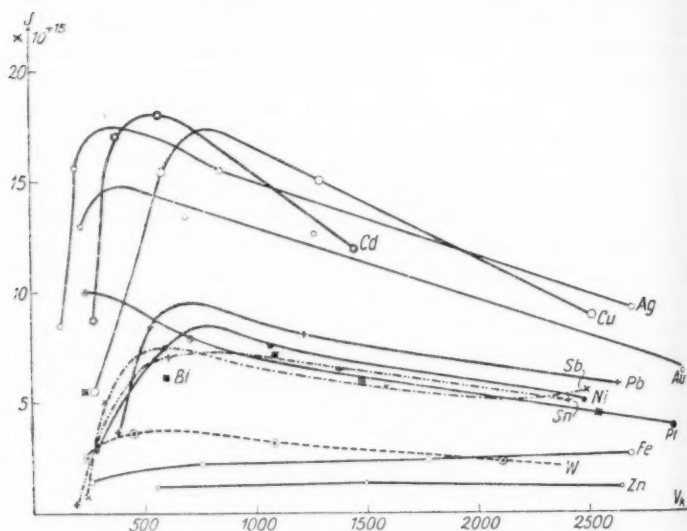


Fig. 9. Zerstäubungsintensität der verschiedenen Metalle

übereinstimmt mit einer Einordnung nach sinkenden Sublimationswärmen.

Alle bisher in der Literatur angegebenen Zerstäubungsreihen beziehen sich auf die in gleichen Zeiträumen abgestäubte *Gewichtsmenge* des Kathodenmetalls, falls sie nicht rein auf qualitativer Schätzung beruhen. Diese *Gewichtsmenge* ist aber ein *falscher Maßstab* bei der Beurteilung der quantitativen Verhältnisse, die *Beobachtungen müssen*, wie oben gezeigt, auf die *pro Zeit- und Flächeneinheit ausgelöste Anzahl der Metallatome*, die Zerstäubungsintensität  $I$ , bezogen werden. Für eine derartige Umrechnung liegen bisher nur die ausreichenden Daten in der voranstehenden Arbeit von Blechschmidt (12)

vor. Das bei ihm gegebene Beobachtungsmaterial ist allerdings auch noch *nicht völlig einwandfrei* zur Prüfung des theoretisch behaupteten Zusammenhangs zwischen Zerstäubungsintensität und Sublimationswärme geeignet, weil es zweifellos bei einer Reihe unedlerer Metalle nicht gelingt, ohne intensive thermische Behandlung im Hochvakuum von Oberflächenschichten frei zu kommen. Bei Magnesium, Aluminium und gelegentlich auch Zink dokumentierte sich die Existenz solcher Schichten direkt optisch durch die von den Kationen erregte Fluoreszenz. Diese *Sekundärstörungen*, von denen die Theorie bisher völlig absieht, müssen natürlich die *Reihenfolge zungunsten solcher Metalle verschieben*.<sup>1)</sup> Daher kommen bei der Beurteilung der primären Zerstäubbarkeit auch *nur in Edelgasen vorgenommene Messungen in Frage*, bei denen chemische Einflüsse weitgehend ausgeschaltet sind (vgl. auch 12).

Die in Argon für 13 Metalle erhaltenen Intensitätskurven zeigt Fig. 9. Die Charakteristiken ordnen sich hier, wie man sieht, in drei Gruppen, zwischen denen man ohne weiteres in der Zerstäubbarkeit unterscheiden kann. Um innerhalb der Gruppen bei den durch die Umrechnung vergrößerten Fehlergrenzen aber eine Ordnung herstellen zu können, muß als Kriterium die für den Elektronenstrom maßgebende Austrittsarbeit  $\varphi$  mit herangezogen werden, da — wie oben — die Nichtberücksichtigung des Elektronenstromes für das frühe Absinken der Kurven verantwortlich sein dürfte. Die Werte für die Austrittsarbeiten sind, bis auf den Wolframwert nach Dushman, einer Arbeit von Güntherschulze (24) entnommen und auf die erste Stelle nach dem Komma abgerundet worden.

In der folgenden Tabelle sind die Sublimationswärmen der einzelnen Metalle  $W_s$ , in Kilokalorien pro Grammatom an-

1) *Anmerkungen bei der Korrektur:* Bei Zn hat der Verfasser inzwischen experimentell festgestellt, daß eine sehr starke Zerstäubung in Wasserstoff wie auch in Argon plötzlich einsetzt, wenn die Elektrode durch Kationenbombardement bis auf etwa 200° C erhitzt wird. Damit dürfte sich der Widerspruch in der Literatur über die Zerstäubbarkeit des Zn aus besserer bzw. schlechterer Kühlung der Kathode erklären. Ob bei dieser Erwärmung durch Abdestillieren von Oberflächenschichten die dem Zn eigentümliche, theoretisch als sehr hoch anzunehmende, Zerstäubbarkeit des reinen Zn zum Ausdruck kommt oder bei dem hohen Dampfdruck des Metalls schon ein gewisser, makroskopischer Verdampfungseffekt hinzutritt, läßt sich noch nicht sicher entscheiden.

gegeben, berechnet nach den Daten im Landolt-Börnstein aus der Differenz: Fester Zustand bei Zimmertemperatur bis dampfförmiger Zustand beim Siedepunkt des Metalls. Die Stellung für Nickel, dessen Daten unbekannt sind, wurde nach dem periodischen System geschätzt. Kleinere Umordnungen in der Reihenfolge erscheinen bei der Unsicherheit des Zahlenmaterials nicht ausgeschlossen. Den derart nach steigenden Sublimationswärmen geordneten Elementen steht in Tab. 3 die nach sinkender Zerstäubbarkeit geordnete Reihe der Kathodenmetalle gegenüber, einmal fortlaufend angegeben, einmal getrennt nach unedleren und edleren Metallen im Sinne von mehr oder weniger zu Oberflächenschichtbildung neigend.

Tabelle 3

Metall	$W$ , Kilocal.	$\varphi$ Volt	Zerstäubbarkeit allgem. Reihe	edlere Metalle	unedlere Metalle
Cd	34	3,7	Cd		Cd
Zn	37	3,4	Ag		
Sb	48	4,0	Cu		Bi
Bi	53	3,4	Au		Sb
Pb	56	3,9	Bi		Pb
Ag	73	4,1	Ni	Ag	
Cu	92	4,0	Sb	Cu	
Sn	95	4,0	Pb		Sn
Au	102	4,2	Sn	Au	
Ni	—	3,7	Pt	Ni	
Fe	143	3,7	Fe		Fe
Pt	164	4,4	W	Pt	W
W	270	4,5	Zn		Zn

Die Tabelle zeigt: Die edleren wie die unedleren Metalle unter sich ergeben anscheinend eine Reihenfolge der Zerstäubbarkeit, die innerhalb der Meßfehler<sup>1)</sup> mit der nach den Sublimationswärmen erwarteten übereinstimmt. Betrachtet man die Gesamtfolge der Metalle, so wird diese Ordnung verwischt, indem sich

1) Für die Fehlergrenzen gilt das zu Fig. 8 Gesagte; sie werden durch die Umrechnung so weit, daß Feinheiten im Struktureinfluß und event. Wärmeleitfähigkeitswirkung der Kathodenmetalle auf die Zerstäubbarkeit überhaupt nicht diskutiert werden können und auch in der Reiheneinordnung bei den sich überschneidenden Kurven eine gewisse Willkür nicht auszuschließen ist. Hier lassen nur Untersuchungen im Hochvakuum streng gesicherte Resultate erwarten.

die Stellung der unedleren Metalle, offenbar dank Oberflächenschichten, im Sinne geringerer Zerstäubbarkeit zumeist verschiebt.

### 11. Zerstäubungsintensität und Füllgas

Gewicht, Größe und Ionisierungsspannung des Kations sind nach der Theorie die drei Faktoren, welche die Wirksamkeit des Füllgases beim Zerstäubungsprozeß bestimmen. Gewicht und Größe regulieren Aufprallgeschwindigkeit und Aufprall-

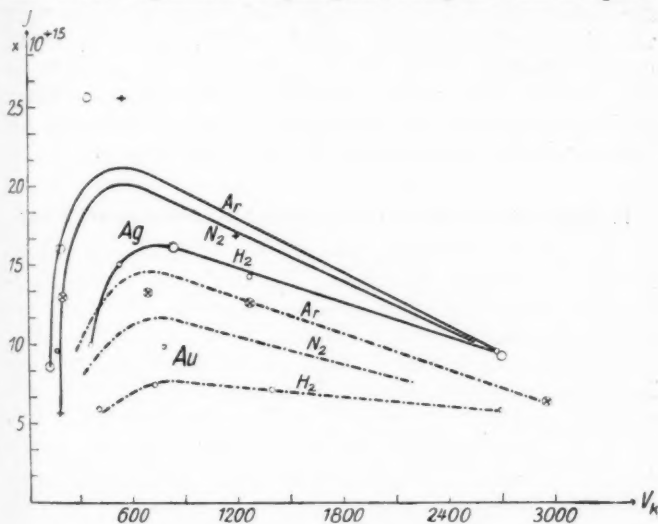


Fig. 10. Zerstäubungsintensität und Füllgas

breite und damit bei gleichem durchlaufenen Felde die Größe der Oberflächen- gegenüber der Tiefenwirkung. Hiernach hat man eine Zunahme der Zerstäubungsintensität mit wachsendem Atomgewicht des Füllgases zu erwarten, falls die Wirkungsquerschnitte etwa konstant bleiben. Auf die zerstäubte Menge bezogen ist diese Gesetzmäßigkeit schon früher wiederholt behauptet worden; daß sie auch nach der Umrechnung auf  $I$  gilt, zeigt Fig. 10 an dem allerdings erst für drei Gase (Ar,  $N_2$  und  $H_2$ ) nach den Messungen von Blechschmidt (12) berechneten Material. Als Kathodenmetalle kommen für diese experimentelle Kontrolle nur Edelmetalle in Frage, weil bei

ihnen zwar nicht alle sekundären Wirkungen aggressiver Gase ausgeschlossen, aber wenigstens Oberflächenschichten mit stärkerer Wahrscheinlichkeit vermieden werden.

Die Rolle der Ionisierungsspannung beim Zerstäubungsprozeß ist bislang noch nicht ganz zu übersehen. Nach der Theorie würde sie sich in einer entsprechenden Vergrößerung der Energiebilanz ausdrücken, die bei den normal vorkommenden Aufprallspannungen kaum ins Gewicht fallen dürfte. Auf der andern Seite kann aber die Ionisierungsspannung nicht wie die Translationsenergie kontinuierlich, sondern sie muß quantenmäßig in einem Akt abgegeben werden, wodurch ihr eine Sonderstellung zufällt. Diese Verhältnisse lassen sich nur an langsamen Ionen im Hochvakuum sauber studieren; der Verfasser hofft, darüber später berichten zu können.

## 12. Sekundäre Erscheinungen bei der Kathodenzerstäubung

In den vorausgehenden Abschnitten ist wiederholt auf das Eintreten *sekundärer Störprozesse* hingedeutet und ihnen gegenüber auf die *primäre physikalische Bedeutung der in der vorgelegten Theorie behandelten Vorgänge* verwiesen worden. Diese Störwirkungen seien jetzt kurz zusammengestellt, um die Fehlerquellen zu kennzeichnen, die so vielfach die Beobachtungsergebnisse entstellt und dadurch die Einsicht erschwert haben.

Nach den Vorstellungen der Theorie über den Ablauf des Zerstäubungsmechanismus kann man die Störwirkungen prinzipiell einteilen in solche, die *vor, während und nach der Auslösung der Metallpartikel* in den Vorgang eingreifen und die nun wiederum *elektrischer oder chemischer Natur* sein können.

Zu den Störungen, die schon vor dem Aufprall des Kations auf die Elektrode wirksam werden, gehören neben den primitiven elektrischen Feldverzerrungen durch Wandaufladungen usw. die zur Oberflächenschichtbildung auf der Kathode führenden chemischen Betätigungen des Füllgases. Durch sie wird für den Kationenstoß das Metall schwerer angreifbar, die *Zerstäubbarkeit sinkt, je unedler das Metall wird, im Sinne der Spannungsreihe*. Die in chemisch aktiven Gasen erfolgende Umstellung der Metalle in der Reihenfolge ihrer Zerstäubbarkeit bietet Beleg dafür.



Diesen zerstäubungsmindernden Faktoren wirken vielfach entgegen *zerstäubungssteigernde Einflüsse*, die sich direkt an der Auslösung von Metallatomen beteiligen. In der Glimmentladung bilden sich „aktive“ Gase, beobachtet sind bisher „aktiver“ Wasserstoff (25) und „aktiver“ Stickstoff (26), die offenbar atomarer Natur sind und selbst feste Metalloberflächen heftig unter Verbindungsbildung angreifen können. *Auf die Ausbeute an „aktiven“ Gasen bei der Glimmentladung hat die Anwesenheit von geringen Verunreinigungen im Füllgas oft enorm steigenden Einfluß*; dies ist einer der Gründe, warum Beobachtungen unter anscheinend gleichen Verhältnissen oft so verschiedene Resultate ergaben.

Wo aber auch nicht ein direkter Angriff des Füllgases auf die Elektroden erfolgt, bietet natürlich die *atomare Existenz der herausgeschleuderten Zerstäubungspartikel* im Gasraum *allen chemischen Kräften die breiteste Angriffsfläche*. In diesem Sinne ist das Panethsche Verfahren zur Herstellung gasförmiger Metallhydride in der Glimmentladung (27) ohne weiteres verständlich, in diesem Sinne erklären sich aber auch alle Beobachtungen, die in so widersprechender Fülle über den Ladungszustand der Zerstäubungspartikel seit 30 Jahren gemacht wurden. Ist die Stromdichte genügend hoch, so müssen endlich auch noch *Ladungs- und Umladungserscheinungen* entscheidend in das Ausbreitungsgesetz des Zerstäubungsbeschlages eingreifen und den von der Theorie behandelten primären Zerstäubungsvorgang völlig überdecken.

Näheres Eingehen auf diese komplizierten Vorgänge verbietet sich an dieser Stelle, nur sei noch auf eine kürzlich erschienene Arbeit von Güntherschulze (28) hingewiesen, die zum erstenmal das Walten chemischer Einflüsse neben dem physikalischen Zerstäubungsprozeß im Experiment erkennt und mit besonderen Kriterien vom Normalvorgang zu scheiden sucht. Die dort beobachteten charakteristischen Ausbreitungsunterschiede des Beschlages erklären sich nach den vorstehenden Überlegungen zwanglos durch die Entstehung und Anreicherung des „aktiven“ Gases im Kathodenfall und seine auflösende Wirkung auf einen sich in diesem Bereich absetzenden Metallniederschlag.

Im übrigen sei hier noch einmal unterstrichen, daß man wohl nicht von elektrochemischer Kathodenzerstäubung als

einer Erscheinung sprechen kann, die dem in diesem Aufsatz behandelten physikalischen Vorgang parallel geht und gleichgeordnet ist. Entweder wird das Metall von den „aktiven“ Gasen direkt angegriffen, wie es z. B. bei As bekannt ist und auch von Güntherschulze (28) beobachtet wurde, dann liegt eine *chemische* Zerstäubung vor, für die die Glimmentladung nur Mittel zur Bildung atomaren Gases und der elektrische Spannungszustand der Elektroden gleichgültig ist. Oder die herausgeschleuderten Metallatome werden vom Füllgas angegriffen, dann liegen *sekundäre Störerscheinungen* vor.

### 13. Zusammenfassung.

In der vorstehenden Arbeit wird der Versuch gemacht, eine Theorie der Kathodenzerstäubung zu entwickeln, die zu exakten Schlußfolgerungen führt und alle bisher beobachteten Erscheinungen zu erklären vermag.

Ausgangspunkt für die Überlegungen ist die Vorstellung, daß unter der Aufprallwirkung der Kationen das Elektrodenmetall lokal verdampft. Diese Anschauung wird thermodynamisch durchgeführt und an wesentlichen Punkten experimentell gestützt. Insbesondere wird auch die Aufprallgeschwindigkeit der Kationen direkt gemessen. Die Theorie führt zu einer Endformel (19), die den Zerstäubungsvorgang qualitativ völlig beschreibt.

In Ergänzung hierzu wird das Ausbreitungsgesetz der Zerstäubungspartikel berechnet und so ermöglicht, die experimentellen Beobachtungen über Beschlagsdichte bzw. von der Kathode abgestäubte Metallmenge auf die physikalisch entscheidende Größe, die pro Zeit- und Flächeneinheit von den Kationen ausgelöste Anzahl  $I$  der Metallatome umzurechnen. Es zeigt sich jetzt, daß innerhalb der allerdings recht weiten Fehlergrenzen die Reihenfolge der Metalle nach wachsender Zerstäubbarkeit übereinstimmt mit der theoretisch zu erwartenden Reihenfolge nach sinkender Sublimationswärme. Weiter wird hier die Wirkung von sekundären Störungen ersichtlich, deren elektrischer und chemischer Einfluß in einem besonderen Abschnitt kurz behandelt wird.

Untersuchungen, die den Zerstäubungsvorgang frei von den Komplikationen der Glimmentladung im Hochvakuum verfolgen und auch der oben kurz behandelten Frage nach

dem Elektronenstromanteil am Gesamtstrom stärkere Aufmerksamkeit schenken, sind in Vorbereitung. Ebenso wird über die chemischen Erscheinungen noch eingehender berichtet werden.

Jena, Physikalisches Institut der Universität, den 15. Oktober 1926.

#### Literaturverzeichnis

1. Fr. Wächter, Ann. d. Phys. 17. S. 903. 1882.
2. W. Hittorf, Ann. d. Phys. 21. S. 126. 1884.
3. W. Wien, Kanalstrahlen S. 28. 1923.
4. L. Holborn u. L. Austin, Wiss. Abh. d. Phys.-Techn. Reichsanstalt 4. S. 101. 1904.
5. V. Kohlschütter, Z. f. Elektrochemie 12. S. 869. 1906; Jahrbuch der Radioakt. 9. S. 355. 1912.
6. J. Stark, Z. f. Elektrochemie 14. S. 752. 1908; 15. S. 509. 1909.
7. G. Holst, Physika 4. S. 68. 1924.
8. A. Berliner, Ann. d. Phys. 33. S. 291. 1888.
9. V. Bush and G. C. Smith, Journ. Amer. Inst. Elektr. Eng. 41. S. 627. 1922.
10. J. Stark und G. Wendt, Ann. d. Phys. 38. S. 921. 1912.
11. A. v. Hippel, Ann. d. Phys. 80. S. 672. 1926.
12. E. Blechschmidt, Ann. d. Phys. 81. S. 999. 1926.
13. R. Holm, Physik. Zeitschr. 25. S. 510. 1924.
14. A. Güntherschulze, Z. f. Phys. 33. S. 820. 1925.
15. R. Holm, Physik. Zeitschr. 25. S. 518. 1924.
16. E. Brose, Ann. d. Phys. 58. S. 731. 1919.
17. A. Aston, Proc. Roy. Soc. London 84. S. 526. 1911.
18. A. Güntherschulze, Z. f. Phys. 37. S. 868. 1926.
19. E. Badareu, Physik. Zeitschr. 25. S. 137. 1924.
20. R. Holm, Sammelbericht. Physik. Zeitschr. 25. S. 503. 1929; 26. S. 412. 1925.
21. W. L. Cheney, Phys. Rev. 10. S. 341. 1917.
22. N. Campbell, Phil. Mag. 38. S. 214. 1919.
23. H. D. Smyth, Proc. Roy. Soc. 102. S. 283. 1922; 104. S. 121. 1923.
24. A. Güntherschulze, Z. f. Phys. 24. S. 52. 1924.
25. K. F. Bonhoeffer, Z. f. Phys. Chem. 113. S. 199. 1924; 116. S. 391. 1925.
26. H. Sponer, Z. f. Phys. 34. S. 622. 1925.
27. F. Paneth, M. Matthies u. E. Schmidt-Hebbel, Chem. Ber. 55. S. 775. 1922.
28. A. Güntherschulze, Z. f. Phys. 36. S. 563. 1926.
29. A. Güntherschulze, Z. f. Phys. 38. S. 575. 1926.

(Eingegangen 21. Oktober 1926)

## 10. Über Farbe und Magnetismus von Ionen; von Georg Joos

### 1. Resonanzlinien der Funkenspektren und Absorptionsstreifen der Ionen

Die Absorption der einwertigen positiven und negativen und der höher geladenen positiven edelgasähnlichen Ionen beginnt erst im ultravioletten Spektralgebiet, die aus ihren aufgebauten Salze und deren Lösungen sind daher farblos. Im Gegensatz dazu sind die zwei- und dreiwertigen positiven Ionen der „Übergangselemente“ Sc bis Cu und ihrer Homologen kräftig gefärbt, während die Salze der seltenen Erden durch einzelne verhältnismäßig scharfe Absorptionsstreifen im sichtbaren Spektralbereich charakterisiert sind. In der Physik hat sich durch Ladenburg<sup>1)</sup> hierfür folgende Erklärung eingebürgert: „In der Reihe Sc bis Cu findet die Vervollständigung der in  $3s$ -Bahnen gebundenen Elektronengruppe statt, während die Zahl der in  $4s$ -Bahnen gebundenen Elektronen wie bei Ca gleich zwei bleibt. Es findet hier gewissermaßen ein energetischer Wettstreit zwischen den Bahntypen  $3s$  und  $4s$  statt, welcher es mit sich bringt, daß die Energiedifferenzen der beiden Bahntypen so klein sind, daß schon sichtbares Licht einen Übergang zwischen beiden bewerkstelligen kann. Analoges gilt für die homologen Elemente Y bis Pd und die Reihe La, Hf bis Pt, während in der Reihe der seltenen Erden gleichzeitig die  $5s$ - und die  $4s$ -Gruppe vervollständigt wird.“

Von chemischer Seite wurde indes in manchen Fällen daran gezweifelt, ob wirklich das freie Ion der Träger der Farbe ist. So schreibt Fajans<sup>2)</sup> aus dem Grunde, daß das wasserfreie Kupfersulfat farblos ist, die blaue Farbe des kristallwasserhaltigen Salzes und seiner wässerigen Lösung nicht dem  $Cu^{++}$ -Ion selbst, sondern dem Komplex  $[Cu(H_2O)_4]^{++}$  zu. Die fortschreitende Erforschung der Funkenspektren der Übergangs-

1) R. Ladenburg, Naturw. 8. S. 5. 1920.

2) K. Fajans, Naturw. 11. S. 165. 1923.

elemente läßt nun bereits mit erheblicher Sicherheit schließen, daß bei jeder Absorption von sichtbarem Licht durch *positive Ionen die Träger keine einfachen Ionen, sondern Komplexe sind, welche das Ion mit dem Lösungsmittel und mitunter auch mit dem Anion bildet*. Im folgenden sollen nun die Gründe für diese Behauptung und ihre Konsequenzen auf magnetischem Gebiet etwas näher erörtert werden.

Zunächst ist der Begriff des Komplexes näher zu präzisieren. Man könnte im Sinne Kossels an eine rein elektrostatische Gleichgewichtslage mehrerer Moleküle, die sich an das eigentliche Ion anlagern, denken. In diesem Fall wäre überhaupt kein Unterschied zwischen der Komplexbildung und der rein elektrostatischen Hydratisierung, die durch die Richtwirkung des Ions auf die Dipole des Wassers bedingt ist, und die wohl bei den einfachen edelgasartigen Ionen allein stattfindet, vorhanden. Daß aber bei der Bildung von Komplexen durch die Übergangselemente eine gründliche Umordnung des ganzen Elektronengebäudes sowohl des Zentralatoms als der andern Teilnehmer stattfindet, das beweist, wie zuerst K. Fajans und der Verf.<sup>1)</sup> erkannt haben, der Umschlag des Magnetismus bei der Bildung der Ionen  $[\text{Fe}(\text{CN})_6]^{4-}$ ,  $[\text{Co}(\text{NH}_3)_6]^{3+}$  und anderer, welche trotz des paramagnetischen Zentralatoms diamagnetisch sind. Die Berechtigung zur Verallgemeinerung dieses Schlusses, daß es sich bei den Komplexen der Übergangselemente nicht um einfache elektrostatische Bindungen handelt, wird durch das im folgenden beigebrachte Tatsachenmaterial erwiesen. Damit wird allerdings den rein elektrostatischen Berechnungen der Bindungswärme, wie sie z. B. von Magnus<sup>2)</sup> durchgeführt wurden, der Boden entzogen; denn die beim quantenhaften Umbau der Elektronenhüllen freiwerdende oder aufzuwendende Energie entzieht sich beim heutigen Stand der Dinge noch vollkommen der Berechnung.

Die Frage nach dem Träger der Farbe wäre gelöst, wenn wir die Funkenspektren höherer Ordnung, welche demselben Ladungszustand, wie er bei den elektrolytischen Ionen vorkommt, zugehören, soweit kennen würden, daß wir ihre Absorptionslinien angeben könnten. Wenn auch dieses Ziel noch

1) K. Fajans u. G. Joos, Z. f. Phys. 23. S. 1. 1924.

2) Näheres bei R. Weinland, Einführung in die Chemie der Komplexverbindungen. Stuttgart 1924. S. 479.

nicht erreicht ist, so kann man doch schon mit ziemlicher Sicherheit Aussagen über die Lage dieser Spektren machen. Die bei den auf Edelgase folgenden Elementen der 2., 3. und 4. Spalte des P. S. festgestellte Regel, daß die Wellenlänge der Resonanz-(Absorptions)linie des einmal ionisierten Atoms ganz ungefähr gleich der Hälfte der Wellenlänge der Resonanzlinie des neutralen Atoms ist, erweist sich nämlich auch bei den Übergangselementen als gültig, wie folgende Tabelle zeigt:

Ungefähre Lage des 1. Absorptionsmultipletts in ÅE.<sup>1)</sup>

	Sc	Ti	V	Fe	Y	Zr
Atom . . . . .	6400	6300	4900	5200	6300	6100
Einfaches Ion . . . .	3650	3370	2700	2500	4300	3500

Bei den andern Elementen liegt ferner die 1. Absorptionslinie des doppelt ionisierten Atoms noch weiter im U. V. als die des einmal ionisierten Atoms. Es wäre daher im höchsten Grad verwunderlich, wenn die Absorptionslinien der höheren Ionisierungsstufen wieder ins Sichtbare rücken würden. Dagegen spricht auch bereits die große Zahl von Linien, welche die genannten Elemente im fernen U. V. haben und die dem neutralen und einfachen ionisierten Atom nicht zugehören können.

Es sei noch bemerkt, daß diese Verschiebung der Absorptionslinien nach kurzen Wellen beim Übergang zu höheren Ionisierungsstufen nicht unbedingt aus der Bohrschen Theorie folgt; diese läßt vielmehr lediglich ein Anwachsen der Ionisierungsarbeit entsprechend der Zunahme der wirksamen Kernladung erwarten. Tatsächlich ist aber in allen bekannten Fällen damit auch eine Vergrößerung der Anregungsspannung gefunden worden.

Zwischen den Absorptionsspektren der Salze bzw. ihrer Lösungen und dem Spektrum des freien Ions gleicher Ladung besteht hiernach *kein* Zusammenhang. Daß andererseits bei nichtpolar gebundenen mehratomigen Systemen Absorption im Sichtbaren sehr häufig vorkommt, sehen wir schon an den zweiatomigen Halogenmolekülen. Beim Jodat<sup>2)</sup> ist die erste Absorptionslinie bei 2062 ÅE. festgestellt worden<sup>2)</sup>, während das

1) V<sup>+</sup> nach W. F. Meggers, Z. f. Phys. **39**, S. 114. 1926, die andern Daten nach der Zusammenstellung von H. N. Russell, Astr. J. **61**, S. 223. 1925.

2) Chr. Füchtbauer, F. Waibel u. E. Holm, Z. f. Phys. **29**, S. 367. 1924.

Jodmolekül durch die bekannten, fast das ganze sichtbare Spektrum bedeckenden Banden charakterisiert ist. Eine Erklärung für diese Färbung der Moleküle kann freilich bisher noch nicht gegeben werden. So erscheint das Auftreten von gefärbten Ionen bei den Übergangselementen als *indirekte* Folge ihres unvollkommenen Ausbaus. Diese Unvollständigkeit bedingt zunächst die Tendenz zur Aufnahme von Elektronen (vgl. unten die besondere Rolle, welche die Zahl 36 für den Magnetismus spielt), welche mit den andern Komponenten des Komplexes geteilt werden.

## 2. Chemische Gründe für die Annahme von Komplexen als Träger der Absorption

Die meisten der in Frage stehenden Salze kristallisieren mit stöchiometrischen Mengen Kristallwasser (am häufigsten mit 6 Molekülen  $H_2O$ ). Die Farbe dieser Hydrate stimmt in den meisten Fällen mit der der Lösung gut überein. Es liegt daher sehr nahe, in der Lösung das Vorhandensein desselben Komplexes wie im Kristall anzunehmen. Als typisches Beispiel wurde bereits das Kupfersulfat angeführt, dessen Anhydrit farblos ist. Eine weitere wichtige Stütze besteht in der Existenz analoger Ammoniakverbindungen, bei denen infolge des Ersatzes der Wassermoleküle durch Ammoniakmoleküle eine Änderung der Farbe eingetreten ist, wie bei dem tiefblauen  $[Cu(NH_3)_4]^{++}$ -Ion. Aus diesem Grund werden in der Chemie schon lange die Hydrate mit definiertem Wassergehalt zu den Komplex-(Koordinations)verbindungen gezählt. Über die Art der Bindung in diesen Komplexen geben aber erst die physikalischen Eigenschaften Aufschluß.

Als Einwand gegen die hier vertretene Auffassung könnte die Existenz farbiger kristallwasserfreier Salze wie der Halogenide des einwertigen Kupfers und Silbers angeführt werden. Bei den Cuprosalzen weist aber schon der Gittertyp (nicht NaCl- oder CsCl-Typ, sondern Zinkblendetyp) darauf hin, daß es sich hier nicht um einfache, aus sauber getrennten Kat- und Anionen aufgebaute Verbindungen handelt. Bei dem im Steinsalzgitter kristallisierenden AgBr, bei dem die Absorption nicht allzuweit von derjenigen der Br-Ionen entfernt ist, ist es dagegen möglich, daß sie von den Br-Ionen selbst herührt, die

unter dem Einfluß der Kationen etwas deformiert sind<sup>1)</sup>, bei AgJ hat der Gittertyp bereits wieder umgeschlagen.

### 3. Der Paramagnetismus der Ionen

Die Auffassung der Ionen der Übergangselemente als Komplexe ist für die Physik insofern von ganz besonderer Bedeutung, als aus ihr die Unmöglichkeit folgt, Suszeptibilitätsmessungen an Salzen und deren Lösungen zur Prüfung der Bohr-Sommerfeldschen Magnetonentheorie zu verwenden. Denn um hier einen Vergleich zwischen Theorie und Beobachtung durchführen zu können, müßten die magnetischen Energieniveaus dieser Komplexe bekannt sein, während die Rechnungen mit den Zeemaneffekten der freien Ionen arbeiten. So erklärt sich das Versagen des bei den Spektren so erfolgreichen Schemas von Hund<sup>2)</sup> bezüglich des Magnetismus der Ionen der Elemente Ti bis Cu. (Die älteren Berechnungen<sup>3)</sup>, welche unter der Annahme, daß die Grundzustände dieser Ionen S-Terme seien, bei Zugabe eines ziemlich großen Meßfehlers ganze Bohrsche Magnetonzahlen lieferten, sind durch die erweiterte Kenntnis des Baus der Spektren in dieser Reihe, welche S-Terme im Grundzustand als Seltenheit erscheinen läßt, überholt.) Mit was für komplizierten Gebilden man es bei den scheinbar so einfachen wässrigen Lösungen der Salze der Übergangselemente zu tun hat, darauf werfen die Beobachtungen von Weiß<sup>4)</sup> über die durch Säurezusatz bewirkte Änderung des Magnetismus von  $\text{CoSO}_4$ - oder  $\text{FeCl}_3$ -Lösungen ein Schlaglicht.

Sehr bemerkenswert bleibt aber die gute Übereinstimmung zwischen der Hundschen Rechnung und der Beobachtung beim Magnetismus der seltenen Erden, wo nur bei Eu eine große Diskrepanz besteht. Obwohl hier eine zufällige Übereinstimmung als fast ausgeschlossen angesehen werden muß, ist doch im Auge zu behalten, daß die Hundschen Grundannahmen, welche den Spektraltyp des Grundzustandes bestimmen, im Bereich der seltenen Erden ihre spektroskopische Probe noch nicht bestanden

1) Vgl. hierüber auch K. Fajans, Naturw. 11. S. 167. Fußnote 3.

2) F. Hund, Z. f. Phys. 33. S. 345, 855. 1925.

3) Literatur bei A. Sommerfeld, Atombau u. Spektrallinien. Braunschweig 1924. S. 637 ff.

4) P. Weiß, J. d. phys. 5. S. 129. 1924.



haben. Noch bedenklicher ist aber folgendes: Erbiumnitrat-hexahydrat stellt einen der ganz seltenen Fälle dar, bei denen nicht nur die paramagnetische Suszeptibilität, sondern auch die Zeemanaufspaltung der Absorptionslinien genau gemessen sind. Und diese Zeemanaufspaltungen sind nun ganz anders, als die Hundsche Theorie erwarten läßt: In Fig. 1 sind die Zeemanaufspaltungen der roten Absorptionsbanden gezeichnet, welche Dubois und Elias<sup>1)</sup> im Longitudinaleffekt an einem Präparat beobachteten, das so orientiert war, daß der das Kristallplättchen durchsetzende Lichtstrahl in die Ebene der optischen Achsen

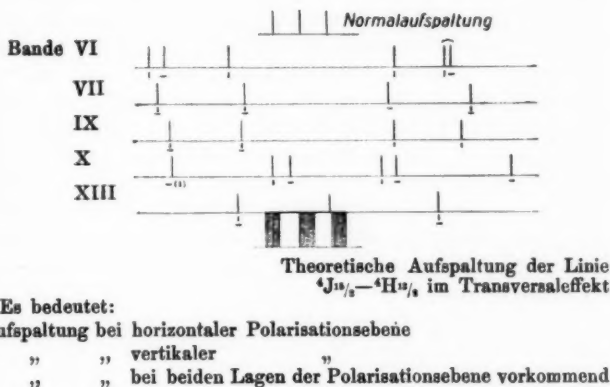


Fig. 1

fiel und mit der einen einen Winkel von  $35^\circ$  bildete. Darüber ist die normale, darunter die berechnete Aufspaltung der vermutlich stärksten Absorptionslinie des freien Ions, welche durch die Symbole  ${}^4J_{15/2} - {}^4H_{15/2}$  charakterisiert ist, eingezeichnet. Die Diskrepanz bleibt von derselben Größe, wenn statt der roten andere Absorptionsbanden und statt der Linie  ${}^4J_{15/2} - {}^4H_{15/2}$  eine andere vom Grundzustand ausgehende Linie des freien Ions gewählt würde. Der Typ der angenommenen Absorptionslinie ergibt sich nach den Landéschen Formeln zu

$$91 \ 89 \ 87 \ 85 \ 83 \ 81 \ 79 \ 77 \ 75 \ 73 \ 71 \ 69 \ 67 \ 65 \ (13) \ (11) \ (9) \ (7) \ (5) \ (3) \ (1)$$

1) H. Dubois u. G. Elias, Ann. d. Phys. **35**, S. 617. 1911.

In der Zeichnung ist die große Komponentenzahl durch eine Schraffur angedeutet.

Man könnte zur Erklärung dieser Unstimmigkeit, an folgendes denken: Zur theoretischen Begründung der Konstanten  $\Theta$  im Weißschen Gesetz des Paramagnetismus ist nach Debye<sup>1)</sup> anzunehmen, daß der Träger des magnetischen Moments in den einzelnen quantentheoretisch erlaubten Lagen eine potentielle Zusatzenergie besitzt, über die keine andere Annahme gemacht werden muß, als daß sie vom Magnetfeld unabhängig ist und für je zwei symmetrische Orientierungen denselben Wert annimmt. Bei der Lichtemission müßte nun in die Energiebilanz auch diese Zusatzenergie eingehen, die, wie ein Überschlag zeigt, von der richtigen Größenordnung werden kann. Dann aber müßte im Gegensatz zu den Beobachtungen von Dubois und Elias die Aufspaltung nicht mehr dem Feld proportional sein, sondern nur linear von ihm abhängen. Denn der Wert der Zusatzenergie bleibt immer derselbe, solange überhaupt eine Richtungsquantelung stattfindet. Eine andere, freilich weiter nicht zu begründende Erklärungsmöglichkeit liegt in der Annahme, daß die Auswahlgesetze, welche bei freien Atomen die Größe der Aufspaltung stark begrenzen, im Kristallverband durch andere zu ersetzen sind.

Als Ergebnis dieser Betrachtungen können wir festhalten, daß bei den Elementen Ti bis Cu der Widerspruch zwischen Beobachtung und Rechnung auf keinen Fall als Widerlegung des Bohrschen Magnetons und der Richtungsquantelung anzusehen sind. Ob die gute Übereinstimmung bei den Salzen der seltenen Erden (sowohl im festen Zustand als in wässriger Lösung) wirklich als eine Bestätigung der in Flüssigkeiten besonders verwunderlichen Richtungsquantelung, welche ein wesentliches Element der Hundschen Rechnung bildet, anzusehen ist, muß vorerst noch offen bleiben. Wirklich einwandfrei läßt sich die Frage nur an Metalldämpfen, deren magnetische Energieniveaus aus der Termanalyse der Zeemaneffekte bekannt sind, prüfen. Statische Permeabilitätsmessungen stoßen hier aber auf große technische Schwierigkeiten, die bisher nicht überwunden wurden, so daß nur die Atomstrahlversuche von Stern und Gerlach übrig bleiben. Diese bestätigen in der

---

1) P. Debye, Phys. Z. 27. S. 67. 1926.

1. Spalte des P. S. sowohl Richtungsquantelung als Bohrsches Magneton, während bei Fe und Ni Widersprüche mit den aus den Spektren berechneten Werten vorliegen.<sup>1)</sup>

#### 4. Magnetismus und Bau der Komplexe

Von verschiedener Seite wurde der Versuch gemacht<sup>2)</sup>, quantitative Beziehungen zwischen dem magnetischen Moment und dem Bau des Komplexes hinsichtlich der Zahl der dem Zentralatom angehörigen Elektronen. Alle diese Versuche basieren auf der Hypothese von Sidgwick<sup>3)</sup>, daß jede nichtpolare Bindung mit einem neutralen Molekül ( $H_2O$ ,  $NH_3$ ) durch zwei, mit einem einfach negativen Ion oder Radikal ( $Cl^-$ ,  $CN^-$ ) durch eine gemeinsame Elektronenbahn bedingt sei. Im  $[Co(NH_3)_6]^{+++}$ -Ion hätte danach das Zentralatom  $27 + 12$  Elektronen, von denen aber wieder wegen des Ladungszustandes des Ions drei abzuziehen sind, so daß die wirkliche Anzahl 36 beträgt, also gleich der des Kryptons wird. In diesem Fall tritt Diamagnetismus auf. Diese Regel hat sich bei allen Komplexen der Übergangselemente Ti bis Cu bewährt. Dagegen sind die Formeln für die Zahl der Magnetonen als Funktion der Elektronenzahl, wenn diese nicht 36 beträgt, heute wegen der Unkenntnis der g-Werte einer Prüfung nicht zugänglich. Auch der naheliegende Gedanke, sich den Bau des Zentralatoms so vorzustellen wie den des einfachen Atoms gleicher Elektronenzahl, bedeutet sicher eine zu weitgehende Vereinfachung der Natur, die zu falschen Konsequenzen führt. So ordnen Welo und Baudisch<sup>4)</sup> das Ion  $[Ni(NH_3)_6]^{++}$  mit seinen 38 Elektronen dem Sr-Atom zu. Diese ist aber im Grundzustand sicher diamagnetisch, während der Nickelkomplex paramagnetisch ist.<sup>5)</sup>

1) W. Gerlach, Ann. d. Phys. **76**. S. 163. 1925 (Cu, Ag, Au, Fe, Ni u. a.); J. B. Taylor, Phys. Rev. **28**. S. 576. 1920 (Na und K).

2) D. M. Bose, Z. f. Phys. **35**. S. 219. 1926; L. C. Jackson, Phil. Mag. **2**. S. 87. 1926.

3) N. V. Sidgwick, Trans. Chem. Soc. **123**. S. 725. 1923.

4) L. A. Welo u. O. Baudisch, Nature **116**. S. 606. 1925.

5) Dieselbe Frage erörtern bei der Struktur der Bandenspektren R. Mecke (Z. f. Phys. **26**. S. 219. 1925) u. R. S. Mulliken (Phys. Rev. **28**. S. 475. 1926). Die Spektren von BO, CO u. NO zeigen in der Struktur der Elektronenterme offenkundige Analogien mit den Atomen gleicher Elektronenzahl Na, Mg und Al. Die Verallgemeinerung scheitert aber schon an Molekülen wie  $N_2$ .

Aber auch ohne Kenntnis der quantitativen Zusammenhänge stellt der Paramagnetismus insofern ein einzigartiges Hilfsmittel zur Erforschung der Komplexe dar, als er — soviel kann wohl heute als sicher angesehen werden — nicht stetig veränderlich ist im Gegensatz zu Refraktion, Diamagnetismus und anderen Eigenschaften. Jede einigermaßen beträchtliche Änderung des Paramagnetismus weist auf eine Umbildung der Elektronenbahnen hin. Die kleinen Abweichungen, welche die Änderung des Diamagnetismus mit sich bringt, können insofern keine Fehlschlüsse verursachen, als sie nur wenige Prozente ausmachen können. Die Bedeutung der magnetischen Untersuchung sei an folgendem Beispiel erläutert: Wie schon mehrfach erwähnt, ist das Ion  $[\text{Co}(\text{NH}_3)_6]^{+++}$  diamagnetisch. Der Diamagnetismus bleibt nach den Messungen von Rosenbohm<sup>1)</sup> erhalten, wenn ein oder zwei  $\text{NH}_3$ -Moleküle durch Cl ersetzt werden, unter gleichzeitiger Verminderung der Wertigkeit des Komplexes um eine Einheit pro Cl-Atom. Nach Kossel haben nun  $\text{NH}_3$  und  $\text{Cl}^-$  gleichen Bau der äußersten Elektronengruppe (Edelgas-konfiguration). Infolgedessen ist zu schließen, daß das Cl als  $\text{Cl}^-$ -Ion eingetreten ist, und daß dessen Bahnen in gleicher Weise mit dem Zentralatom geteilt werden, wie die des  $\text{NH}_3$ .<sup>2)</sup> Von gleichem Bau wie die Elektronenhülle des  $\text{NH}_3$  ist aber auch diejenige des Wassers, es müßte daher der Komplex  $[\text{Co}(\text{H}_2\text{O})_6]^{+++}$  diamagnetisch sein. Die einzige Verbindung, in der dieser Komplex vermutet wird, ist der Kobaltalaun. Seine Suszeptibilität ist noch nicht bestimmt. Ist dieser Alaun wirklich diamagnetisch, so ist dies zugleich ein Beweis für die Ansicht der Chemiker, daß von den 12 Molekülen Kristallwasser nur 6 an das Zentralatom gebunden sind. Andererseits beweist der starke Paramagnetismus (25 Weißsche Magnetonen) des Schönits  $(\text{NH}_4)_2\text{Co}(\text{SO}_4)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ , daß das in ihm enthaltene Ion  $[\text{Co}(\text{H}_2\text{O})_6]^{++}$  ganz anderer Art ist. Dieselbe Magnetonen-zahl fand nun aber auch Jackson<sup>3)</sup> für das Vitriol  $\text{Co}(\text{SO}_4) \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ . Dies kann wieder als Stütze dafür angesehen werden, daß hier das 7. Wassermolekül nicht dem Komplex angehört (Wernersche „Exoquoverbindungen“).

1) E. Rosenbohm, Z. f. phys. Chem. **93**. S. 693. 1919.

2) Zum gleichen Ergebnis in bezug auf die Gesamtelektronenzahl führt die schematische Anwendung der Sidgwick'schen Regel.

3) L. C. Jackson, Phil. Trans. A **224**. S. 1. 1925.

**Zusammenfassung**

Es wird an Hand des spektroskopischen, chemischen und magnetischen Materials gezeigt, daß die Träger der Farbe und des Magnetismus bei den Ionen der Übergangselemente keine einfache atomare Gebilde sind, sondern Komplexe, welche unter Umbau der Elektronenhüllen gebildet sind. Die Bedeutung der Suszeptibilität für die Kenntnis des Baues der Komplexe wird am Beispiel einiger Kobaltverbindungen erläutert.

Jena, Physikalisches Institut, Oktober 1926.

(Eingegangen 21. Oktober 1926)

# 11. Über den Massenpunkt in der Wellenmechanik; von Walter Wessel

Die Quantenmechanik machte schon in Gestalt der Bohrschen Theorie von den Gleichungen der Punktmechanik einen insofern eingeschränkten Gebrauch, als sie zwar die vollständige Lösung  $S$  der Hamilton-Jakobischen Differentialgleichung — die Wirkungsfunktion — ableitete, aber nicht bis zu den Bahngleichungen und *Lagen*parametern überging, sondern die Konstanten der Wirkungsfunktion — Energie und Impuls-komponenten — unmittelbar durch die Ganzzahligkeitsforde-rungen festlegte; erst bei den unperiodischen Bewegungen, wo die „Quantenbedingungen“ versagten, mußte man bis zu den Bewegungsgleichungen und Anfangswerten der Lagenkoordinaten gehen. Die schöne, von Schrödinger in mehreren Abhand-lungen<sup>1)</sup> entwickelte Wellenmechanik interpretiert das so: die Wirkungsfunktion, eine Ortsfunktion und klassisch Repräsen-tantin einer *Schar* von Systembahnen als ihren Orthogonal-trajektorien, ist Phase einer Wellenbewegung, die als Ganzes aufzufassen ist und von der nicht eine noch weiter zu be-stimmende Trajektorie herausgegriffen werden kann. — Für den kräftefrei bewegten Massenpunkt der Masse  $m_0$  und der Geschwindigkeit  $v$  haben wir z. B. die Wirkungsfunktion

$$S = \frac{m_0(v, r)}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \text{const.}$$

( $\beta = \frac{v}{c}$ ,  $c$  Lichtgeschwindigkeit). Die Punktmechanik hebt eine Orthogonalgerade der Ebenenschar  $S = \text{const.}$  hervor und bezeichnet sie als *Bahn* des Punktes; die Wellenmechanik betrachtet dagegen eine Funktion der Form

1) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. 79. S. 361, 489. 1926; s. a. be-sonders die Bearbeitung von L. Flamm, Phys. Ztschr. 27. S. 600. 1926.

$$\psi = \psi_0 e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - S)}$$

( $W$  Energie), d. i.

$$(1) \quad \psi = \psi_0 \exp \frac{2\pi i m_0 c^2}{h \sqrt{1 - \beta^2}} \left( t - \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{r})}{c^2} \right)$$

die der grundlegenden Differentialgleichung dieser Theorie

$$(2) \quad \Delta \psi = \frac{1}{u^2} \ddot{\psi} \quad u = \frac{c^2}{v}$$

genügt, irgendwie als Darstellung der Bewegung. M. Born neigt sogar zu der Meinung, daß sich in der Angabe eben der Funktion (1) die Aussagen der Theorie grundsätzlich erschöpfen und daß die Bahnbestimmung der Elektronen nur statistisch durchführbar wäre.<sup>1)</sup> Man kann aber eine sehr viel mehrsagende Lösung von (2) ableiten, die nur asymptotisch, nämlich in großer Entfernung vom Orte des Massenpunktes, in (1) übergeht, und die diesen Ort und sein Fortschreiten genau festlegt. Wir brauchen nämlich nur die einer Kugelwelle mit ruhendem Zentrum entsprechende Lösung

$$\psi = \psi_0 \frac{e^{2\pi i \nu \left( t - \frac{r}{u} \right)}}{r}$$

von (2) einer Lorentztransformation zu unterwerfen, aber mit der Phasengeschwindigkeit  $u = \frac{c^2}{v}$  an Stelle der Lichtgeschwindigkeit  $c$ , also der Transformation<sup>2)</sup>,

$$(3) \quad \begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{v} \left( \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{v})}{v^2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) + \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right), \\ t = \frac{t' - \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{v})}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{cases}$$

Dann geht die Gleichung (2) in sich über; als neue Lösung erhalten wir aber

$$(4) \quad \psi = \psi_0 \frac{\exp 2\pi i \nu \left( t - \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{u^2} - \frac{1}{u} \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)^2 - \frac{[\mathbf{r}, \mathbf{v}]^2}{u^2}} \right)}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)^2 - \frac{[\mathbf{r}, \mathbf{v}]^2}{u^2}}}.$$

1) M. Born, Ztschr. f. Phys. 38. S. 803. 1926.

2) Über die Vektorform vgl. E. Madelung, d. math. Hilfsmittel d. Physikers, S. 230. Berlin 1925.

(Wir haben den Faktor  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}}$  in  $\psi_0$  bzw. in die noch willkürliche Konstante  $v$  aufgenommen und wieder  $t$  und  $r$  an Stelle von  $t'$  und  $r'$  geschrieben.) So haben wir also ein Wellengebilde mit einer natürlichen Singularität am Orte  $r = vt$  (die sich durch Überlagerung von zwei Lösungen mit  $+u$  und  $-u$  auch in ein bloßes Maximum verwandeln läßt) und die mit der nach Größe und Richtung durch  $v$  gegebenen Geschwindigkeit auf einer Geraden durch den Koordinatenursprung fortschreitet.

Daß diese Lösung nicht ganz trivial ist, glauben wir, weil erstens die ebenen Wellen, durch die man sie in großer Entfernung vom Orte der Singularität naturgemäß approximieren kann, in der Richtung von  $v$  wirklich die Geschwindigkeit  $u$  haben — das wird durch die Transformation (3) genau so vermittelt, wie die Invarianz von  $c$  durch die gewöhnliche Lorentztransformation — und zweitens, weil man  $v$  so wählen kann, daß einerseits diese Wellen die richtige Frequenz aufweisen, während andererseits für einen mitbewegten Beobachter das ganze Gebilde mit der von  $v$  unabhängigen Frequenz  $m_0 c^2/h$ , schwingt; das beruht auf dem Werte von  $u$ . Setzen wir nämlich  $r \parallel v$ , so finden wir

$$\psi = \psi_0 \frac{\exp 2\pi i v \left(1 + \frac{v}{u}\right) \left(t - \frac{r}{u}\right)}{r - vt},$$

also die richtige Phasengeschwindigkeit  $u$ . Um auch die richtige Frequenz einzuführen, müssen wir

$$(5) \quad v = \frac{m_0 c^2}{h \left(1 + \frac{v}{u}\right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

setzen. Wir transformieren uns nun auf ein mitbewegtes Bezugssystem. Diese Transformation muß natürlich eine wirkliche Lorentztransformation sein mit dem Parameter  $c$ , nicht  $u$ . Wir vertauschen also in (3)  $+v$  mit  $-v$  und  $u$  mit  $c$  und tragen in (4) ein; dann haben wir für  $r \parallel v$  zunächst

$$\psi = \psi_0 \frac{\exp 2\pi i v \frac{1 + \frac{v}{u}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left( \left(1 - \frac{v}{u}\right) t' + \left(\frac{v}{c^2} - \frac{1}{u}\right) r' \right)}{r' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



und mit  $v$  nach (5) und  $u$  nach (2)

$$\psi = \psi_0 \frac{\exp 2\pi i \frac{m_0 c^2}{h} t'}{r' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

d. h. der mitbewegte Beobachter erkennt die Schwingung als mit  $\frac{m_0 c^2}{h}$  veränderlich, und zwar parallel  $v$  *unabhängig vom Orte mit gleicher Phase*. Die letzte Bemerkung erinnert unmittelbar an ein merkwürdiges, mechanisches Bild de Broglies<sup>1)</sup>; in der Tat haben wir mit (4) gewissermaßen die analytische Beschreibung jenes „periodischen Phänomens“ gewonnen, an dem de Broglie seinen Satz von der Phasenharmone demonstriert. Der Massenpunkt ist danach ein pulsierendes Etwas, das für einen mitbewegten Beobachter mit der Frequenz  $\frac{m_0 c^2}{h}$ , für einen ruhenden (NB.: der davon durch Lichtsignale informiert wird) mit  $\frac{m_0 c^2}{h} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  schwingt; darüber hinweg streicht beständig eine ebene Welle der Frequenz  $\frac{m_0 c^2}{h \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

mit einer Geschwindigkeit, die die Lichtgeschwindigkeit in demselben Verhältnis überschreitet, wie die des Massenpunktes darunter liegt. Dann ist das pulsierende Etwas beständig in Phase mit der Welle. Würden wir unsere asymptotisch ebenen Wellen als ebene Wellen über die Zentralerregung hinweg fortsetzen, so würden sie, für einen ruhenden Beobachter, mit ihr ebenso in Phase sein, wie de Broglies Wellen mit dem „periodischen Phänomen“.

In unserer Darstellung läuft dieses Phänomen nicht mehr unverbunden neben der Welle her, sondern ist selber ein Teil davon; der herannahende Massenpunkt kündigt sich durch ebene Wellen an, aber bei seinem Näherkommen krümmen sie sich allmählich darum herum und schließen ihn zuletzt als Zentrum ein. Dieses Bild hat ohne Zweifel auch de Broglie im Auge, wenn er in seinem mechanischen Vergleiche<sup>2)</sup> schwingende

1) L. de Broglie, Ann. de phys. 3. S. 22. 1925; Phil. Mag. 47. S. 446. 1924.

2) L. de Broglie, a. a. O. S. 36—37.

Systeme um ein Zentrum verdichtet sein läßt<sup>1)</sup>; es liegt überdies, wie uns scheint, ganz im Sinne von Schrödingers physikalisch so ansprechendem Grundgedanken, nach dem nur in weiter *Ferne* von Atomen und Massenpunkten die Phasenflächen der Trägheitsbewegung merklich eben, die Systembahnen „Strahlen“ sind, während in der Nähe solcher Zentren eine Art *Beugung* durch Variation des Brechungsindex' auf kurze Strecken eintritt. Wie sollte sich nicht auch die Phasenswelle des Massenpunktes selber an seinem Orte durch eine Singularität auszeichnen?

Auf große Entfernungen von ihrem Zentrum nimmt die Funktion  $\psi$  räumlich wie  $1/r$  ab; für kleine Geschwindigkeiten  $v \ll u$ , d. i.  $v \ll c$ , genauer wie  $\frac{e^{ikr}}{r}$ ,  $k = \frac{2\pi m_0 v}{h}$ . Es sei daran erinnert, daß das auch, aber für ein *ortsfestes* Zentrum, für Schrödingers Lösungen beim Keplerproblem hinsichtlich ihrer Abhängigkeit vom radius vector für positive Energiewerte zutrifft. — Seine Eignung zum „Modell eines Massenpunktes“ kann unser durch (4) und (5),  $u = c^2/v$  beschriebenes Gebilde natürlich nur dadurch nachweisen, daß es die Bewegung des Massenpunktes bzw. des Elektrons *beim Vorbeigang an ruhenden Ladungen und Atomen* wenigstens *asymptotisch* gesetzmäßig wiederzugeben imstande ist. Eine Eigentümlichkeit unserer Funktion, die ihre analytische Behandlung erschwert, ist, daß sie sich im Ruhssystem nicht in das Produkt einer Funktion der Zeit und einer Funktion des Ortes aufspalten läßt.

Jena, Physikalisches Institut der Universität, Oktober 1926.

1) Ich möchte nicht versäumen, an dieser Stelle auf eine Note Hrn. de Broglies *Compt. rend.* 180. S. 498. 1925 hinzuweisen, die ich zu meinem Bedauern erst nach Drucklegung der meinen bemerkte und in der de Broglie auch lorentztransformierte Kugelwellen zur Illustration des Elektrons heranzieht. Es handelt sich dabei freilich um eine Lösung der *elektromagnetischen*, nicht der damals noch nicht aufgestellten *mechanischen* Schwingungsgleichung; daher breiten sich im mitbewegten System de Broglies Wellen nach allen Seiten mit Lichtgeschwindigkeit aus, während die Phasengeschwindigkeit unserer Wellen Funktion der Richtung ist. (Anm. b. d. Korrr.)

(Eingegangen 21. Oktober 1926.)

**12. Über die Beeinflussung der ultraroten Kohlensäureabsorptionsbande bei  $4,27\ \mu$  durch fremde Gase und ihre Anwendung zur Gasanalyse;  
von Max Wimmer**

(Jenaer Dissertation)

**A. Einleitung und Literatur**

Über das ultrarote Absorptionsspektrum der Kohlensäure liegen schon viele Untersuchungen vor. Die meisten Arbeiten<sup>1)</sup> behandeln die Frage, ob für die Absorption in Gasen das Beer'sche Gesetz gültig ist, welches aussagt, daß die Absorption nur von der Menge der absorbierenden Substanz abhängig ist, daß es also nur auf das Produkt aus Schichtdicke und Konzentration ankommt. Die Frage wurde dahin beantwortet, daß diese Forderung nicht erfüllt ist, daß ferner, wenn ein fremdes Gas zugegen ist, die Absorption außer vom Produkt aus Schichtdicke und Partialdruck der Kohlensäure auch in hohem Maße vom Gesamtdruck abhängig ist, Ångström<sup>2)</sup> beobachtete außer der quantitativen Änderung der Absorption noch eine qualitative Änderung der Absorptionsbanden, nämlich eine Verbreiterung der Absorptionsbanden mit wachsendem Partialdruck, die Paschen<sup>3)</sup> schon 1894 vermutet hatte. Schaefer<sup>4)</sup> bestätigte dann diese Tatsache. Er untersuchte die Absorptionsstreifen bei  $2,7\ \mu$  und  $4,3\ \mu$ . Rubens und Ladenburg<sup>5)</sup> untersuchten noch den Streifen bei  $14,7\ \mu$  und fanden auch dort, daß nur bei konstantem Gesamtdruck die Absorption von dem Produkt aus Schichtdicke und Partialdruck abhängig ist.

1) J. Tyndall, Pogg. Ann. 113. S. 41. 1861. — S. Arrhenius, Drud. Ann. 4. S. 690. 1901.

2) K. Ångström, Drud. Ann. 6. S. 163. 1901.

3) F. Paschen, Wied. Ann. 51. S. 34. 1894.

4) Cl. Schaefer, Drud. Ann. 16. S. 93. 1905.

5) H. Rubens u. E. Ladenburg, Verhandl. d. d. Phys. Ges. 7. S. 170. 1905.

Ångström<sup>1)</sup> machte Versuche, um den Einfluß eines indifferenten Gases auf die ultraroten Absorptionsspektren zu untersuchen und hierbei wurde eine starke Zunahme der Absorption der Kohlensäure bei Hinzufügung von selbst nicht absorbierender, d. h. kohlenstofffreier Luft gefunden. Bei seinen weiteren Versuchen fand Ångström, daß die Absorption unabhängig von der Natur des hinzugefügten Gases ist, daß es also gleichgültig ist, ob kohlenstofffreie Luft oder Wasserstoff der Kohlensäure hinzugefügt werden. G. Hertz<sup>2)</sup> fand bei seinen Messungen ebenfalls die Abhängigkeit vom Gesamtdruck, außerdem aber auch, daß es nicht gleichgültig ist, ob man den Druck erhöht durch Kompression auf kleineres Volumen oder durch Zufügung eines fremden, indifferenten Gases. Er fand weiter, daß die Absorption bei Zufügung von Wasserstoff etwas größer ist, als bei Zufügung von kohlenstofffreier Luft. Ferner ist die Absorption bei Hinzufügung von Luft dieselbe wie die Absorption bei der reinen Kohlensäure vom gleichen Gesamtdruck und entsprechend kleinerer Schichtdicke.

Ähnliche Beobachtungen über Intensitätsveränderungen wurden auch an anderen absorbierenden Gasen gemacht. Dufour<sup>3)</sup> fand Absorptionsänderungen im Absorptionsspektrum von Stickstoffdioxid und Bromdampf, wenn er Wasserstoff, Luft und Kohlensäure den absorbierenden Gasen hinzufügte. Wood<sup>4)</sup> fand beim Quecksilberabsorptionsspektrum Übereinstimmendes. Frl. E. v. Bahr<sup>5)</sup> untersuchte die Zunahme der Absorption mit wachsendem Druck für mehrere absorbierende Gase, indem die Menge des absorbierenden Gases festgehalten und der Druck durch Zufügung von Wasserstoff und Sauerstoff erhöht wurde und fand, daß bei allen Gasen die Absorption sich mit wachsendem Druck einem bestimmten Maximalwert nähert, der bei den einzelnen Gasen bei verschieden großem Druck erreicht wird.

Die ganzen Versuchsergebnisse wurden nun anfangs so erklärt, daß außer der Anzahl der absorbierenden Moleküle auch

---

1) K. Ångström, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik 4, 3. Nr. 30. 1908.

2) G. Hertz, Verhandl. d. d. Phys. Ges. 13. S. 617. 1911.

3) A. Dufour, C. R. 145. S. 173, 757. 1907.

4) R. W. Wood, Astrophysical Journal 26. S. 41. 1907.

5) E. v. Bahr, Ann. d. Phys. 29. S. 780. 1909.

noch ihr Abstand maßgebend sei. Planck<sup>1)</sup> hat dies theoretisch untersucht und findet, daß die Absorption mit wachsendem Druck zunehmen muß. Die anderen Ergebnisse dieser Theorie konnten schon nicht so ohne weiteres auf die Kohlensäureabsorptionsbanden angewandt werden, da die Banden aus sehr vielen feinen Linien bestehen, während sich die Arbeit von Planck auf eine einzelne Linie bezieht. Nach der Theorie von Planck durfte durch Zusatz eines indifferenten Gases, das selbst weder absorbiert noch das absorbierende Gas chemisch beeinflußt, die Absorption nicht geändert werden.

Chr. Füchtbauer<sup>2)</sup> sprach nun wohl zuerst die Vermutung aus, daß diese Verstärkung der Absorption nur scheinbar ist, während der wirkliche Einfluß des Fremdgases darin besteht, daß die Kurve des Absorptionskoeffizienten als Funktion der Wellenlänge verbreitert wird, wobei aber die Fläche der Kurve annähernd unverändert bleibt. Trotz der konstanten Fläche bewirkt diese Verbreiterung aber eine Zunahme der Absorption, weil infolge der exponentiellen Abhängigkeit der Absorption vom Absorptionskoeffizienten einerseits eine Verkleinerung des Absorptionskoeffizienten an der Maximalstelle nur eine kleine Verminderung der Absorption, andererseits die Zunahme des Koeffizienten in den äußeren Teilen der Kurve eine relativ große Verstärkung der Absorption bewirkt, so daß die gesamte absorbierte Energie verstärkt ist. Daß die Fläche der Kurve des Absorptionskoeffizienten durch den Fremdgasdruck nicht wesentlich beeinflußt, auf keinen Fall aber verstärkt wird, ist im Fall der Quecksilberlinie 2537 durch die Versuche von Füchtbauer, Joos und Dinkelacker<sup>3)</sup> einwandfrei erwiesen.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist eine eingehende Untersuchung dieser Verhältnisse bei der ultraroten Absorptionsbande der Kohlensäure bei  $4,3\mu$  einmal im Hinblick auf die Möglichkeit, diese Absorption zu gasanalytischen Zwecken nutzbar zu machen, andererseits auch, um aus der beobachteten Intensitätsänderung einen Aufschluß über die verbreiternde Wirkung zu erhalten.

1) M. Planck, Sitzungsber. d. Kgl. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin 1903. I. S. 480.

2) Chr. Füchtbauer, Physik. Zeitschr. 12. S. 722. 1911.

3) Chr. Füchtbauer, G. Joos u. O. Dinkelacker, Ann. d. Phys. 71. S. 204. 1923.

## B. Die Versuchsanordnung

Ein Nernststift  $N$  wurde durch zwei sphärische, chemisch oberflächenversilberte Hohlspiegel  $H_1$  und  $H_2$  auf dem Spalt eines Spektrometers  $S_1$  abgebildet. Die beiden Hohlspiegel befanden sich in dem großen Absorptionsrohr  $R_1$ . Das Spektrometer war ein Steinsalzspektrometer mit 2 Prismen und befand sich in einem luftdicht abgeschlossenen Kasten. Der Austrittsspalt  $S_2$  des Spektrometers wurde durch einen dritten sphärischen Hohlspiegel  $H_3$ , der sich ebenfalls in einem Rohre  $R_2$  befand, auf der Lötstelle des Thermoelementes eines Radiomikrometers  $R.-M.$  abgebildet (Fig. 1). Im einzelnen ist nun zu bemerken:

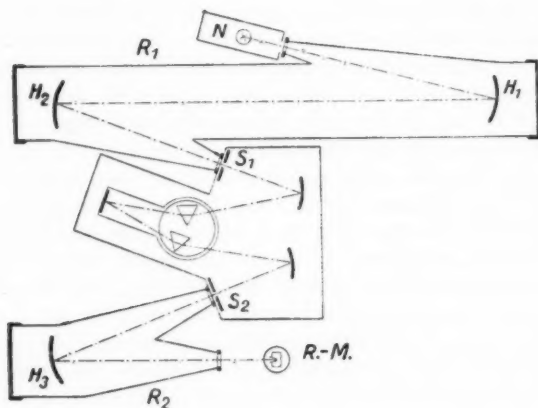


Fig. 1

Der Gesamtstrahlengang in der Versuchsanordnung betrug 410 cm. Davon kommen 190 cm auf das Absorptionsrohr  $R_1$ , 95 cm auf das zweite Rohr, 100 cm auf den Strahlengang im Kasten und 25 cm befanden sich noch in Zimmerluft. Die letzten 25 cm kommen auf den Raum zwischen Lichtquelle und Absorptionsrohr, Absorptionsrohr und I. Spalt, II. Spalt und Rohr  $R_2$ ,  $R_2$  und Radiomikrometer.

*Lichtquelle.* Der Nernststift brannte mit 120 Volt und 0,95 Amp. Ein Eisendrahtwiderstand und ein regulierbarer Widerstand waren vorgeschaltet. Der Brenner wurde zur Ver-

meidung von Spannungsschwankungen aus einer Akkumulatoren-batterie gespeist und befand sich zum Schutze gegen Luft-störungen in einem mit Asbest ausgekleideten Kasten. Ein Milliamperemeter gestattete es, die Stromstärke dauernd zu kontrollieren. Die Schwankungen betrugen im ungünstigsten Falle 10 Milliamp., was bei den Intensitätsmessungen einer Ab-weichung von 1 Proz. entsprechen würde. Für die Messungen selbst kommt dieser Fehler jedoch nicht in Betracht, da die Schwankungen nur gelegentlich auftraten und die Beobachtungen dann immer ausgesetzt wurden.

*Absorptionsrohr.* Der Absorptionsstreifen bei  $4,27\ \mu$  ist so stark, daß Hertz, der in seiner Versuchsanordnung einen Strahlengang von 260 cm hatte, schon infolge des natürlichen Kohlensäuregehaltes der Zimmerluft eine Maximalabsorption von 86 Proz. erhielt, so daß ihm nur noch ein kleiner Meßbereich zur Verfügung stand. Aus diesem Grunde wurde hier darauf Bedacht genommen, die Kohlensäure zunächst soweit wie mög-lich aus dem Strahlengang zu entfernen, und zwar geschah dies zunächst durch den Bau der großen Rohre  $R_1$  und  $R_2$ . Das Absorptionsrohr  $R_1$  hatte einen Inhalt von etwa 25 l, und der Strahlengang im Rohr betrug 190 cm. Es war abgeschlossen mit zwei 3 mm starken Flußspatplatten. Die lichte Weite des Rohres betrug 180 mm, die Wandstärke 3 mm. Als Verschuß-platten an den Enden der Rohre dienten Eisenplatten, in denen sich Nuten mit getalgten Lederringen befanden. Die Rohre, die zuerst nicht dicht hielten, wurden mehrmals mit Schellack überzogen und so vollkommen dicht gemacht. Die Lederdichtung bewährte sich ausgezeichnet. Mit Gummidichtung war kein Ergebnis zu erzielen, da der Gummi beim Festziehen weg-gedrückt wurde.

*Spektrometer.* Das Spektrometer war ein Steinsalzspektro-meter mit 2 Prismen, 2 exzentrischen Ausschnitten von Parabol-spiegeln ( $f = 150$  mm) und einem Planspiegel, der sich doppelt so schnell drehte wie der Prismentisch. Hierdurch wurde das Minimum der Ablenkung erhalten. Die beiden Prismen hatten einen brechenden Winkel von  $63^\circ$ . Die Länge der brechenden Kanten betrug 5,0 cm, die Breite der Seitenflächen 6,5 cm. Die Eichung des Spektrometers geschah mit Hilfe der Absorptions-banden selbst. Die Einstellung wurde durch Rechnung kon-trolliert, wobei die Werte der Dispersion des Steinsalzes den

Angaben von Paschen entnommen wurden. In der bei engem Spalt und einem hohen Kohlensäuredruck (675 mm Hg) aufgenommenen Energiekurve wurden nicht nur die Banden bei  $2,7\ \mu$  und  $4,27\ \mu$  gefunden, sondern auch die Bande der Kohlensäure bei  $2,04\ \mu$ , die neuerdings Schaefer und Philipps<sup>1)</sup> als die stärkste nach der Bande bei  $2,7\ \mu$  festgestellt haben.

*Spalte.* Die Spalte wurden mit einem Meßmikroskop eingestellt. Die Breite betrug bei allen Messungen  $0,09\ \text{mm}$ , entsprechend einem Wellenlängenintervall von  $0,062\ \mu$  und 2 Teilstrichen der Spektrometertrommel. Das Verhältnis des Spaltes zur Bandenbreite ist aus den Figuren der Intensitätskurven, in denen der Spalt eingezeichnet ist, zu ersehen.

*Parabolspiegel.* Exzentrische Ausschnitte von Parabolspiegeln wurden verwandt, da diese eine bessere Abbildung ergeben als sphärische Spiegel. Die Gründe dafür sind die folgenden: Der Spalt liegt auf der Achse des Paraboloids, d. h. im Brennpunkt des Spiegels. Er wird nicht, wie bei Kugelspiegeln seitlich verlegt. Dadurch wird z. B. der Verzeichnungsfehler vollkommen vermieden. Es läßt sich nun weiter nachweisen, daß bei exzentrischen Ausschnitten die Hauptfehler der Parabolspiegel, die starke Komabildung und die Streuung durch Bildwölbung nicht so störend ins Gewicht fallen wie bei Kugelspiegeln.<sup>2)</sup>

*Spektrometerkasten.* Das ganze Spektrometer befand sich in einem vollkommen luftdicht abgeschlossenen Kasten, der mit 2 dünnen Flußspatplatten vor den Spalten verschlossen war. In dem Kasten befanden sich mehrere Schalen mit Ätzkali und Natronkalk. Beides sind Absorptionsmittel für Kohlensäure und Wasserdampf. Die Prismen hielten sich in dem Kasten ausgezeichnet. Zum Schutze der Silberspiegel befanden sich noch einige Schälchen mit Bleiacetat in dem Kasten.

*Schirm.* Als Klappschirm zum Ein- und Ausschalten des Lichtes diente nach Hertz ein Schirm, der aus zwei  $1\ \text{mm}$  dicken Glasplatten mit dazwischengelegtem  $0,25\ \text{mm}$  dickem Zelluloid bestand. Daß dieser Schirm noch 3—4 Proz. der ultraroten Strahlung durchläßt, bedingt keinen Fehler für die Ab-

1) Cl. Schaefer u. W. Philipps, Ztschr. f. Phys. **36**, S. 641. 1926.

2) C. A. Sonnefeld, Die Hohlspiegel 1925—26. S. 50. Union Dtsch. Verlagsgesellschaft Berlin. — Zentralztg. f. Optik und Mechanik 1922. Heft 28.



sorptionsmessungen, er gibt jedoch ein viel reineres Spektrum als ein Blechschirm, da das unvermeidliche diffuse sichtbare Licht bereits bei eingeschaltetem Schirm das Radiomikrometer trifft und so durch die Differenz der Ausschläge mit und ohne Schirm von selbst eliminiert wird.

*Rohr 2.* Der Strahlengang vom Spalt  $S_2$  des Spektrometers bis zum Radiomikrometer wurde ebenfalls von der Kohlensäure dadurch befreit, daß ein weiteres Rohr  $R_2$ , verschlossen mit zwei 3 mm dicken Flußspatplatten in den Strahlengang eingeschaltet wurde. Der sphärische Hohlspiegel  $H_3$  befand sich natürlich auch im Rohr.

*Radiomikrometer.* Das Radiomikrometer war zur Konzentration der Strahlung mit einem konischen Spiegel versehen und zur Vermeidung von äußeren Luftstörungen mit einer luftdicht schließenden Glocke umgeben, vor deren Fenster sich wieder eine Flußspatplatte von 3 mm Dicke befand. Das ganze Instrument befand sich in einer erschütterungsfreien Juliuschen Aufhängung. Der Ausschlag des Radiomikrometers betrug für die Strahlung einer 2 m entfernten Hefnerkerze bei einem Skalenabstand von 2,5 m 300 mm. Die Ruhelage des Instrumentes war so, daß unter denselben Bedingungen zwischen 2 Ablesungen Abweichungen über 1 mm ganz selten vorkamen. Von größter Bedeutung ist es nun auch, daß der Ausschlag des Radiomikrometers proportional der Intensität der Strahlungsquelle ist. Es wurde dies mit dem rotierenden Sektor geprüft und ergab genaue Proportionalität. Die Abweichung der Werte für die einzelnen Punkte der Proportionalitätskurve betrug höchstens 1 Proz.

*Pumpe.* Zuerst wurde zum Evakuieren der großen Rohre eine rotierende Quecksilberpumpe nach Gaede verwandt. Es stellte sich jedoch bald heraus, daß die auf chemischem Wege oberflächenversilberten Spiegel unter der Einwirkung des Quecksilberdampfes verdarben. Dies wurde nun vermieden, indem eine zweistufige Ölpumpe (Gerykpumpe) verwendet wurde, die in einer verhältnismäßig kurzen Zeit die Rohre luftleer machte.

*Manometer.* Als Manometer diente für kleine Drucke ein Drehmanometer nach Dr. U. v. Reden, Kenometer genannt, für große Drucke ein gewöhnliches Quecksilbermanometer. Es mußte immer beachtet werden, daß möglichst wenig Quecksilberdampf in die Rohre  $R_1$  und  $R_2$  gelangte.

*Gasbereitung.* Die Kohlensäure wurde aus Magnesit („reinst“ von Merck bezogen)  $\text{MgCO}_3$  hergestellt. Getrocknet wurde sie mit Chlorcalcium und Phosphorpentoxyd. Die Luft und der Wasserstoff wurden durch 3maliges Hindurchleiten durch Kalilauge und durch Überleiten über Chlorcalcium, Phosphorpentoxyd und Bleiacetat von Kohlensäure, Wasserdampf und Schwefelwasserstoff befreit. Der Wasserstoff wurde hergestellt aus Zink und verdünnter Salzsäure. Argon und Stickstoff wurden aus der Bombe entnommen. Zu den Kohlensäuremessungen von 100 mm Druck an wurde ebenfalls Bombenkohlensäure verwendet. Sie ergab dieselben Absorptionswerte wie die aus Magnesit hergestellte Kohlensäure. Für alle 4 Gase wurde getrennt festgestellt, daß sie an der Stelle der Bande keine Absorption zeigten.

Im Vakuum hielten sich die Spiegel sehr gut, nur im Spektrometerkasten waren sie nicht sehr haltbar. Ein Versuch mit durch Kathodenzerstäubung vernickelten Spiegeln scheiterte daran, daß nur etwa 50 Proz. der Strahlung reflektiert wurden. Es wurden deshalb wieder Silberspiegel verwandt.

#### C. Der Gang der Messungen

Da in den Tagesstunden, in denen die Hausbatterie des Instituts mehrfach benutzt wurde, größere Spannungsschwankungen auftraten, wurden die Beobachtungen zum größten Teile während der Nachtzeit ausgeführt, in der dem Beobachter die Batterie ganz allein zur Verfügung stand. Die Stromstärke brauchte dann nur ganz selten nachreguliert zu werden. Die Messungen gingen in folgender Weise vor sich:

Vor jeder Meßreihe wurden die Rohre evakuiert und die Energieverteilungskurve aufgenommen. Diese Kurve, die Null- oder Restkurve genannt werden soll, ist eben bedingt durch die noch vorhandene Kohlensäure, die aus dem Strahlengang nicht vollkommen zu entfernen ist. Als Beispiel für die Konstanz der erhaltenen Werte sind in Fig. 2 drei verschiedene Messungen der Restkurve wiedergegeben. Die Abweichung der Werte für die einzelnen Punkte der Kurve beträgt 1 Proz. Zu bemerken ist noch, daß, ehe mit den Messungen begonnen werden konnte, erst längere Zeit gewartet werden mußte, bis der Nullpunkt des Radiomikrometers nicht mehr wanderte und der Nernstbrenner sich eingebrannt hatte.

Zunächst wurden die Messungen mit reiner Kohlensäure ausgeführt, und zwar so, daß das bis zu einem Druck von 0,064 mm Hg evakuierte Absorptionsrohr  $R_1$ , das wirkliche Absorptionsrohr, bis zu verschiedenen Drucken mit Kohlensäure gefüllt und jedesmal die Energieverteilungskurve aufgenommen wurde.

Hierauf wurde das Absorptionsrohr wieder bis zu einem Drucke von 0,064 mm Hg evakuiert und die Kohlensäure durch Lüften aus dem Zimmer entfernt. Dann wurde die Energieverteilungskurve des Vakuums, d. h. die Nullkurve von neuem aufgenommen, nach der Meßreihe das Vakuum kontrolliert und das Rohr bis zu einem bestimmten Drucke z. B. 1,62 mm Hg mit Kohlensäure gefüllt. Nach Aufnahme der Kurve wurde eins der vier verwendeten Gase (kohlensäurefreie Luft, Wasserstoff, Argon und Stickstoff) bis zu fünf verschiedenen Gesamtdrucken zugeführt und jedesmal gemessen. Genau so wurden für drei verschiedene bestimmte Kohlensäuredrucke die Beobachtungen ausgeführt. Die sehr oft aufgenommenen Energieverteilungskurven fürs Vakuum und dieselben Kohlensäuredrucke zeigten sehr gute Übereinstimmung, was aus Fig. 2 für die Nullkurve zu ersehen ist. Am Schluß einer jeden Meßreihe fanden stets Kontrollmessungen statt, daß sich auch nichts während der Beobachtung geändert hatte, so z. B. die Intensität der Lichtquelle. Die Beobachtungen über den Einfluß der Fremdgase auf die Bande wurden zweimal in verschiedenen Zeitabschnitten ausgeführt.

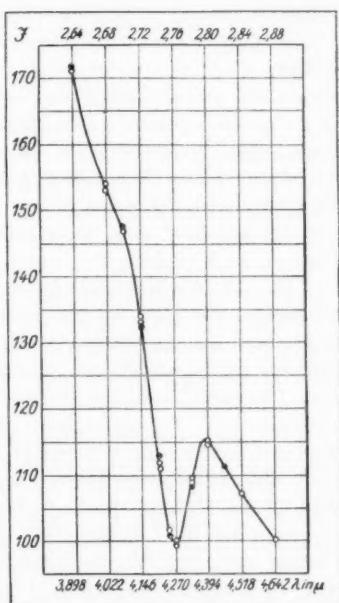


Fig. 2

Die gasanalytischen Untersuchungen gingen wie folgt vor sich. Der Partialdruck der Kohlensäure beträgt etwa 0,2 bis 0,3 mm Hg. Aus diesem Grunde mußten hier noch Messungen für noch niedrigere Kohlensäuredrucke unter dem Einfluß von kohlensäurefreier Luft ausgeführt werden. Sechs verschiedene Kohlensäuredrucke wurden verwandt und für jeden einzelnen Druck Luft bis zu fünf verschiedenen Gesamtdrücken binzugefügt. Um Luft zu den Untersuchungen befördern zu können, wurde ein großes Gefäß von etwa 75 l Inhalt gebaut. Dieses Rohr wurde evakuiert und hielt vollkommen dicht. Mit dem evakuierten Rohre wurden nun verschiedene Luftproben entnommen. Diese Beobachtungen wurden zweimal wiederholt. Es traten Abweichungen in der Einsenkung der Energiekurven auf, die jedoch in dem Schwanken des Kohlensäuregehaltes der Luft zu suchen sind.

Da mit zunehmendem Fremdgasdruck sowohl die Maximalabsorption als auch die Breite der Absorptionskurve zunimmt, bietet sich als ein geeignetes relatives Maß für gasanalytische Zwecke die Gesamtfläche der Intensitätskurve dar, welche mit dem Polarplanimeter ermittelt wurde. Solange man mit dem Minimum der Energieverteilungskurve noch weit genug vom Nullwert der Energie entfernt ist, könnte man auch den Maximalwert der Absorption verwenden. Erst bei höheren Drucken wird dieses Maß zu unempfindlich, da dann eine weitere Vermehrung der Kohlensäure keine Steigerung des Maximalwertes, sondern nur eine Verbreiterung der Absorptionsbande hervorruft, d. h. eine Vergrößerung der Fläche bewirkt. Eine Berechnung der Absorptionskoeffizienten hätte wenig Sinn, da die ganze Kurve noch vom Auflösungsvermögen des Spektralapparates abhängig ist und die Bande eben in Wirklichkeit aus vielen einzelnen Zacken besteht. Auch mit der höchsten bisher erreichbaren Dispersion ist es nicht gelungen, die Linien voneinander zu trennen. — Für das Studium der Beeinflussung der Fremdgase sind dagegen die direkt aufgenommenen Intensitätsverteilungskurven am günstigsten.

#### D. Die Messungsergebnisse

##### a) Die Absorption in reiner Kohlensäure

In Fig. 3 sind die Intensitätskurven bei verschiedenen Kohlensäuredrucken angegeben. Aus der Figur, in der als

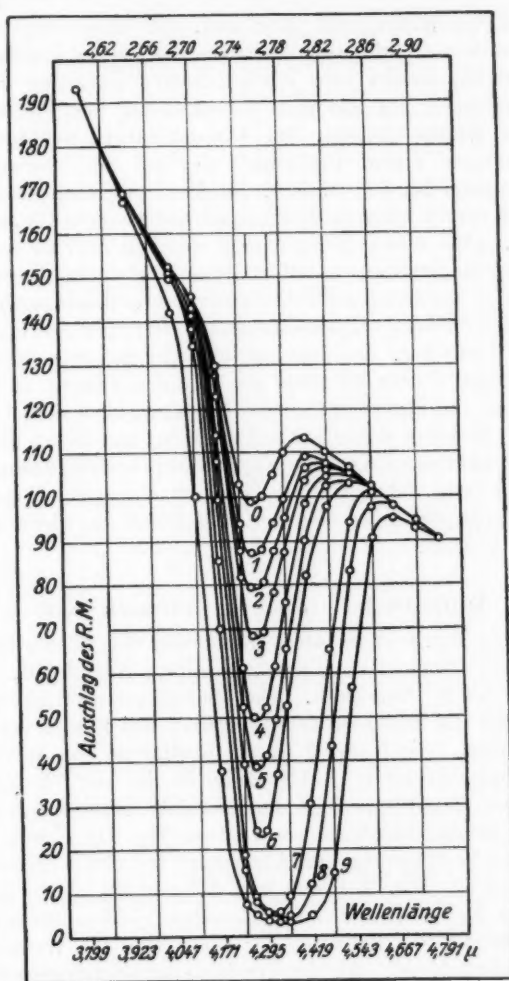


Fig. 3

0 = Restkurve	5 = 11,38 mm Hg-Druck:	CO <sub>2</sub>
1 = 1,70 mm Hg-Druck:	6 = 20,00 "	CO <sub>2</sub>
2 = 3,04 " "	7 = 100,00 "	CO <sub>2</sub>
3 = 5,19 " "	8 = 200,00 "	CO <sub>2</sub>
4 = 8,46 " "	9 = 675,00 "	CO <sub>2</sub>

Abszisse die Wellenlänge in  $\mu$  bzw. die Trommelteilung, als Ordinate der Radiomikrometerrausschlag in Millimeter aufgetragen ist, ersieht man die qualitative Änderung der Absorptionsbande, die wie eine Verschiebung der Bande nach längeren Wellen aussieht. Die Minima nähern sich nicht der Null, sondern einem Grenzwert, der bei dem verwendeten Spektrapparat bei 4 Proz. liegt. Die Maximalabsorption beträgt also auch für die höchsten Kohlensäuredrucke nicht 100, sondern 96 Proz. (Aus diesen Kurven geht deutlich hervor, daß man bei höheren Drucken unbedingt die Fläche der Intensitätskurven zur Auswertung der Absorption verwenden muß.) Diese noch übrigbleibende Intensität rührt von dem vorhandenen diffusen Licht her. Die Kurven sind sehr gut reproduzierbar; es ist jedoch immer im Auge zu behalten, daß sie in hohem Grade von den Eigenschaften des benutzten Spektrometers abhängen. Es hätte daher gar keinen Sinn, aus diesen Energieverteilungskurven Zahlen für den Absorptionskoeffizienten zu berechnen und anzugeben, da sie sich bei jeder Apparatur, welche die Bandenlinien nicht aufzulösen vermag, wieder anders ergeben würden.

#### b) Die Beeinflussung durch fremde Gase

In den Fig. 4—7 ist die Veränderung der Absorption mit steigendem Druck der 4 Fremdgase Luft, Wasserstoff, Argon und Stickstoff dargestellt. Die Energieverteilungskurve in Fig. 4 zeigt die Zunahme der Absorption bei Zusatz von Luft als Fremdgas. Die Kurve 0 ist die Restkurve, die durch den noch übrigbleibenden Kohlensäurerest in der Zimmerluft bedingt ist. Die Kurve 1 ist die Energiekurve, die man erhält für einen Kohlensäuredruck von 1,62 mm Hg. Die Kurven 2—6 zeigen die Veränderung der Absorption bei einem Fremdgasdruck von 50, 100, 200, 400 und 675 mm Hg. Ganz analog zeigen die Fig. 5—7, immer für denselben Kohlensäureanfangedruck 1,62 mm, die Zunahme der Absorption für Wasserstoff, Argon und Stickstoff. Wie der Vergleich der Energieverteilungskurven zeigt, ist die Wirkung für Argon am kleinsten, für Wasserstoff am größten. Stickstoff und Luft, die in der Mitte stehen, verhalten sich fast gleich. Der Vergleich zwischen den vier Fremdgasen geht aus Fig. 8 hervor.

In derselben Reihenfolge sind dann noch Messungen aus-

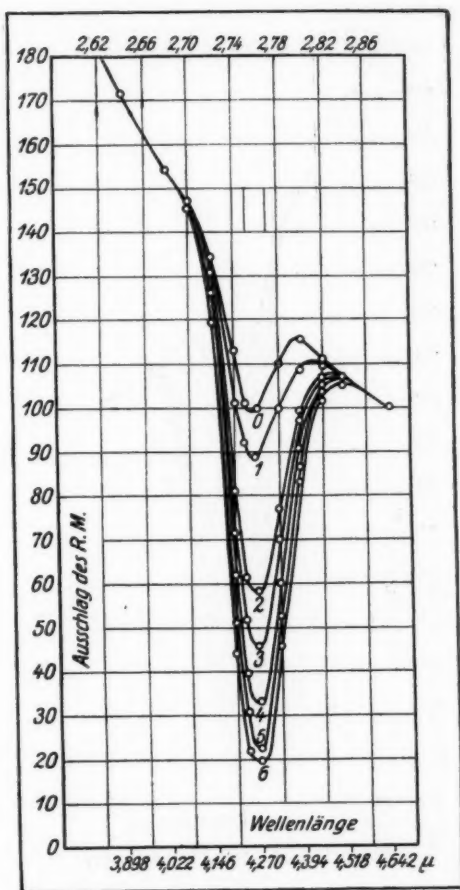


Fig. 4

0 = Restkurve

1 = 1,62 mm Hg-Druck:	CO <sub>2</sub>			
2 = 1,62 "	"	CO <sub>2</sub> + 48,38 mm Hg-Druck:	Luft	
3 = 1,62 "	"	CO <sub>2</sub> + 98,38 "	"	"
4 = 1,62 "	"	CO <sub>2</sub> + 198,38 "	"	"
5 = 1,62 "	"	CO <sub>2</sub> + 398,38 "	"	"
6 = 1,62 "	"	CO <sub>2</sub> + 678,38 "	"	"

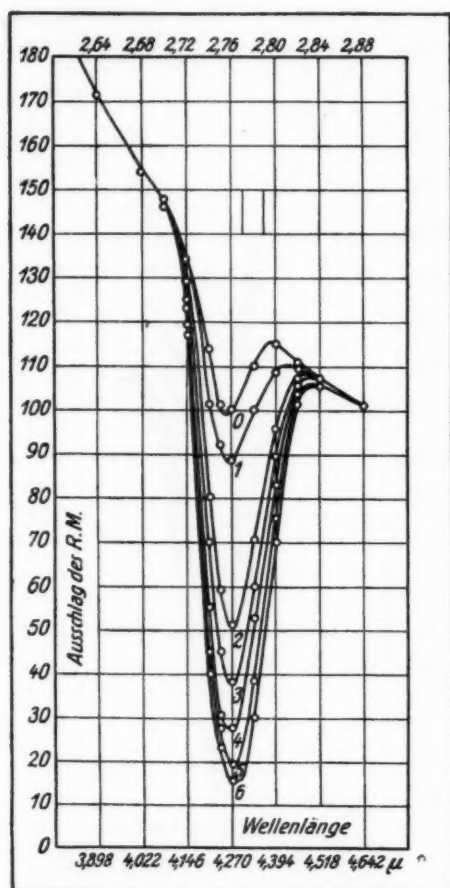


Fig. 5

0 = Restkurve

1 = 1,62 mm Hg-Druck:  $\text{CO}_2$

2 = 1,62 " "  $\text{CO}_2 + 48,38$  mm Hg-Druck:  $\text{H}_2$

3 = 1,62 " "  $\text{CO}_2 + 98,38$  " "  $\text{H}_2$

4 = 1,62 " "  $\text{CO}_2 + 198,38$  " "  $\text{H}_2$

5 = 1,62 " "  $\text{CO}_2 + 398,38$  " "  $\text{H}_2$

6 = 1,62 " "  $\text{CO}_2 + 678,38$  " "  $\text{H}_2$



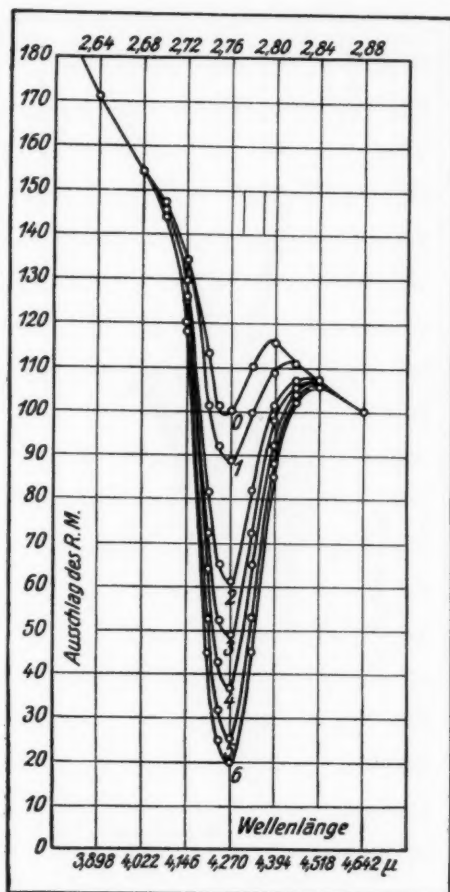


Fig. 6

0 = 1,62 Restkurve

1 = 1,62 mm Hg-Druck:	CO <sub>2</sub>		
2 = 1,62 "	"	CO <sub>2</sub> + 48,38 mm Hg-Druck:	A
3 = 1,62 "	"	CO <sub>2</sub> + 98,38 "	A
4 = 1,62 "	"	CO <sub>2</sub> + 198,38 "	A
5 = 1,62 "	"	CO <sub>2</sub> + 398,38 "	A
6 = 1,62 "	"	CO <sub>2</sub> + 673,38 "	A

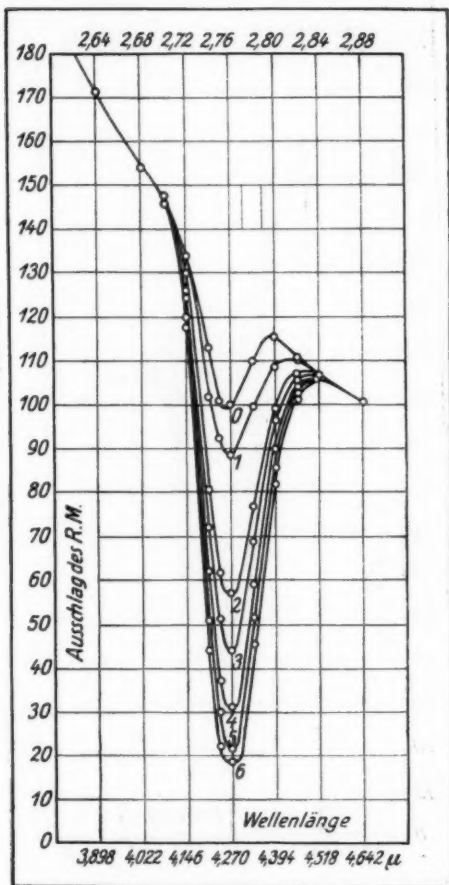


Fig. 7

0 = Restkurve

1 = 1,62 mm Hg-Druck:	CO <sub>2</sub>			
2 = 1,62 "	"	CO <sub>2</sub> + 48,88 mm Hg-Druck:	N <sub>2</sub>	
3 = 1,62 "	"	CO <sub>2</sub> + 98,88 "	"	N <sub>2</sub>
4 = 1,62 "	"	CO <sub>2</sub> + 198,88 "	"	N <sub>2</sub>
5 = 1,62 "	"	CO <sub>2</sub> + 398,88 "	"	N <sub>2</sub>
6 = 1,62 "	"	CO <sub>2</sub> + 678,88 "	"	N <sub>2</sub>

geführt worden für zwei andere Kohlensäureanfangsdrucke, und zwar 2,85 mm und 5,19 mm Hg. Auch hier tritt der Unter-

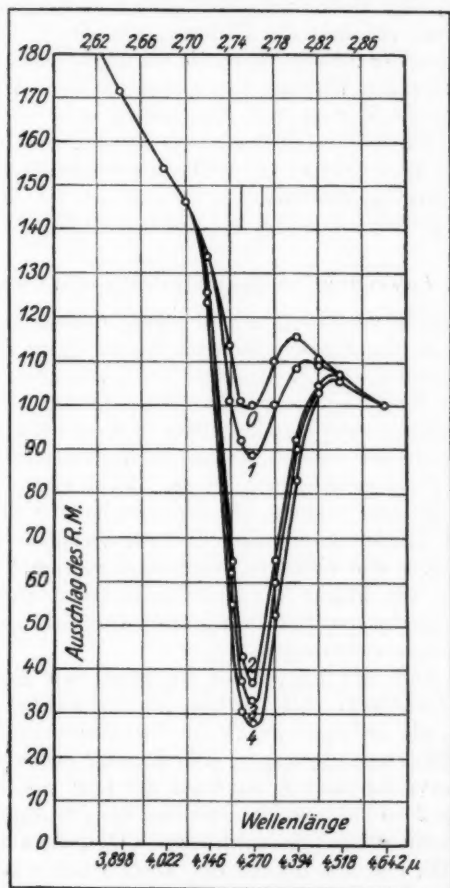


Fig. 8

0 = Restkurve

1 = 1,62 mm Hg-Druck:  $\text{CO}_2$

2 = 1,62 „ Hg-Druck:  $\text{CO}_2$  + 198,38 mm Hg-Druck: A

3 = 1,62 „ Hg-Druck:  $\text{CO}_2$  + 198,38 „ Hg-Druck:  $\text{N}_2$  und Luft

4 = 1,62 „ Hg-Druck:  $\text{CO}_2$  + 198,38 „ Hg-Druck:  $\text{H}_2$

schied zwischen den einzelnen Gasen deutlich hervor. Da die Verhältnisse ganz analog liegen, wie bei den vorhergehenden Messungen, sind diese Ergebnisse nicht wiedergegeben.

Da diese verstärkende Wirkung, wie schon erwähnt, auf Verbreiterung der Absorptionsbande beruht, so ist der Vergleich der verbreiternden Wirkung dieser Gase mit ihrer Wirkung auf die Linienverbreiterung von Quecksilber von Interesse. Es zeigt sich, daß bei den Beobachtungen von Füchtbauer und Joos an der ultravioletten Quecksilberabsorptionslinie 2537A.-E. die Verbreiterung ebenfalls am größten ist für Wasserstoff, dann folgt jedoch erst Argon und gleich nach diesem Stickstoff.

### c) Anwendung zu gasanalytischen Zwecken

Aus dem bereits Gesagten geht hervor, daß die Absorptionsbande der Kohlensäure zu benutzen ist, in einem Gasgemisch den Partialdruck der Kohlensäure zu bestimmen, wenn die Art und die Menge der übrigen Gase einigermaßen bekannt sind. Da die Wirkungen der einzelnen Gase in ihrer Größe sich nicht stark unterscheiden, ist eine genaue Analyse des störenden Gasgemisches nicht erforderlich. In der Regel wird es sich um Luft als Fremdgas handeln. Es wurde daher für eine größere Anzahl von Kohlensäuredrucken Luft als Fremdgas von 50 bis 675 mm Druck den einzelnen Kohlensäureanfängsdrucken zugefügt und die Fläche der Intensitätskurven (Absorptionskurven) als geeignetes Maß in Funktion von Kohlensäure- und Fremdgasdruck aufgetragen.

Fig. 9 zeigt die Kurven als Funktion von Kohlensäure- und Fremdgasdruck. Als Abszisse ist der Kohlensäuredruck in mm Hg, als Ordinate die Fläche der Absorptionskurven in Quadratmillimeter aufgetragen. Die Kurve 1 bedeutet die Absorptionskurve für einen Zusatzdruck der Luft von 50 mm Hg. Die Kurven 2—5 bedeuten entsprechend die Absorptionskurven für einen Zusatzdruck (Gesamtdruck =  $\text{CO}_2$  + Zusatzgasdruck) von 100, 200, 460 und 675 mm Hg. Diese Kurven können nun verwandt werden, den Partialdruck der Kohlensäure in einem Luftgemisch sofort abzulesen.

Die Luftproben, deren Herkunft in der Tabelle unten angegeben ist, wurden im Absorptionsrohr auf 460 mm Hg entspannt. Aus dem hierbei mit Hilfe der Eichkurven ermittelten Partialdrucke der  $\text{CO}_2$  erhält man denjenigen für den Normal-

zustand der Luft (760 mm und 0°) durch Multiplikation mit

$$\frac{760}{460} \cdot \frac{291}{278},$$

wobei die Lufttemperatur 18° C ist.

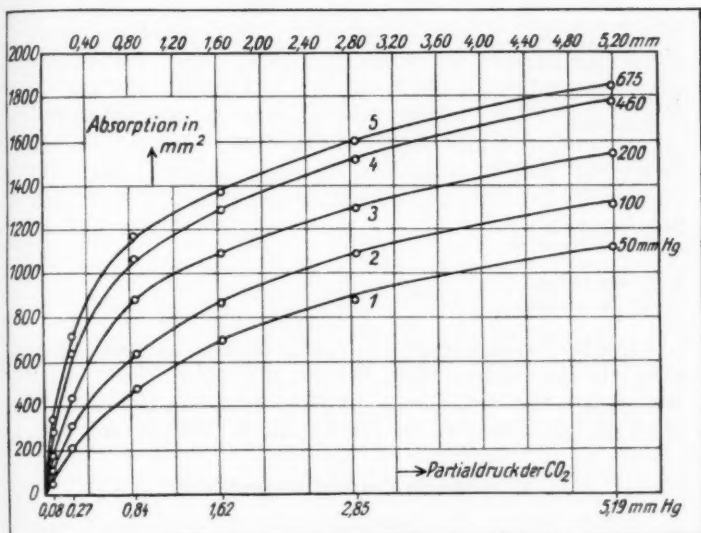


Fig. 9

1—5 Absorptionskurven für 50, 100, 200, 460 und 675 mm Hg-Zusatzdruck (Gesamtdruck).

Die Ergebnisse sind in folgender Tabelle wiedergegeben:

Tabelle 1

Herkunft der Luft	Fläche der Absorptionskurve in qmm	Partialdruck der CO <sub>2</sub> in mm Hg bei 460 mm und 18°	Partialdruck der CO <sub>2</sub> in mm Hg bei 760 mm und 0°
1. Landgrafenberg 60 m über dem Institut	540	0,22	0,39
2. Feld im Tale	520	0,20	0,35

Tabelle 1 (Fortsetzung)

Herkunft der Luft	Fläche der Absorptionskurve in qmm	Partialdruck der CO <sub>2</sub> in mm Hg bei 460 mm und 18°	Partialdruck der CO <sub>2</sub> in mm Hg bei 760 mm und 0°
3. Institutsgarten	570	0,24	0,42
4. Feld auf dem Landgrafenberge	540	0,22	0,39
5. Hörsaal vor der Vorlesung	600	0,26	0,46
6. Hörsaal nach der Vorlesung	1230	1,38	2,43
7. Arbeitszimmer des Beobachters	660	0,30	0,53
8. Arbeitszimmer des Beobachters	810	0,50	0,88

Der Kohlensäuregehalt der Luft im Zimmer des Beobachters schwankt ganz beträchtlich, wie aus den Messungen 7 und 8 hervorgeht. Der Partialdruck der Kohlensäure im Hörsaal nach der Vorlesung nimmt zu um 1,97 mm Hg bei 760 mm und 0° C.

#### E. Fehlerquellen und Genauigkeit

Schwankungen der Stromstärke, die während der Hauptmessungen in der Nacht ganz selten auftreten, wurden durch gute Kontrolle des Milliampereometers vermieden, d. h. die Beobachtungen wurden ausgesetzt.

Nachdem der Nernstbrenner und die Skalenbeleuchtungslampe in Betrieb gesetzt waren, wurde längere Zeit gewartet, ehe mit den Messungen begonnen wurde. Der Nullpunkt des Radiomikrometers wanderte dann nur noch ganz wenig.

Die Unschärfe in der Abbildung und die Anwesenheit von falschem Licht wurde dadurch vermieden, daß die Reflexionswinkel der sphärischen Hohlspiegel möglichst klein gewählt und exzentrische Ausschnitte von Parabolspiegeln verwandt wurden. Um die Größe dieser Fehler nach Möglichkeit konstant zu erhalten, wurde beim erforderlichen Neujustieren sehr wenig an der Gesamtapparatur verändert. Vor allem wurde an den Spalten nichts geändert, sie hatten immer dieselbe Größe.

Der mittlere Fehler für die einzelnen Intensitätskurvenpunkte betrug bei den Messungen über den Einfluß der Fremdgase 1—2 Proz.

Bei den gasanalytischen Untersuchungen wurde, wie schon gesagt, die Fläche der Intensitätskurven mit Hilfe des Polarplanimeters ausgewertet. Sie ließ sich damit auf etwa 2 Proz. genau ermitteln, so daß, da bei einer, zu einer stetigen Kurve zusammengefaßten Punktreihe die Fehler der Einzelmessung größtenteils ausgeglichen sind, die Fläche mit einem Fehler von 3 Proz. behaftet ist. Aus den Kurven der Fig. 11 ersieht man, daß für niedrige Partialdrucke (bis 1 mm Hg-Druck) die Unsicherheit des Kohlensäurepartialdruckes 2 Proz., für größere Partialdrucke (bis 5 mm Hg-Druck und noch höhere Drucke) bis zu 10 Proz. beträgt.

#### **F. Zusammenfassung**

1. Die Absorption der Kohlensäurebande bei  $4,27\mu$  und ihre Abhängigkeit vom Fremdgasdruck wurde experimentell untersucht.

2. Es ergab sich, daß die durch Linienverbreiterung bedingte scheinbare Verstärkung der Absorption von der Art des Zusatzgases abhängt, und zwar wächst die verstärkende (verbreiternde) Wirkung der Gase Wasserstoff, Luft, Stickstoff und Argon in der Reihenfolge: Argon — Luft — Stickstoff — Wasserstoff, d. h. die Verstärkung ist am größten bei dem Zusatz von Wasserstoff.

3. Die so gewonnenen Resultate wurden benutzt, eine Methode zur Bestimmung des Partialdruckes der Kohlensäure in einem Gasgemisch zu gewinnen. Die Fläche der Absorptionskurve läßt sich zu gasanalytischen Zwecken als Maß für den Kohlensäuregehalt verwenden, wenn die Art der Zusatzgase und der Gesamtdruck bekannt ist. Zu diesem Zwecke müssen die Eichkurven bei den verschiedenen Gasen unter Variation von Partialdruck und Gesamtdruck aufgenommen werden. Der Kohlensäuregehalt läßt sich von 0,02 mm bis 1 mm Partialdruck mit etwa 2 Proz. Genauigkeit, bei höheren Drucken mit 10 Proz. Genauigkeit ermitteln. Die Stärke des Verfahrens liegt also in der Bestimmung sehr kleiner Kohlensäuremengen, während für größere Drucke andere Verfahren überlegen sind.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung von Hrn. Prof. Dr. Straubel unter Leitung von Hrn. Prof. Dr. Joos im Physikalischen Institut der Universität ausgeführt.

Es sei mir gestattet, diesen Herren, sowie Hrn. Geh. Hofrat Prof. Dr. M. Wien für die überaus freundliche Unterstützung bei Anfertigung der Arbeit meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Ferner bin ich den Firmen Carl Zeiss und Schott & Gen. für die Überlassung von Materialien und die sorgfältige Herstellung einzelner Teile der Versuchsanordnung, der Helmholtz-Gesellschaft für das geliehene Radiomikrometer zu Dank verpflichtet.

Jena, Physikalisches Institut, November 1926.

(Eingegangen 21. Oktober 1926)

---



### 13. *Über die Richtungsverteilung der von polarisierten Röntgenstrahlen ausgelösten Elektronen;* *von Fritz Kirchner*

(1. Mitteilung)

Jede Wirkung elektromagnetischer Strahlung beruht auf der Wechselwirkung zwischen der Strahlung und den Elektronen der Materie. Der atomare Vorgang, der dieser Wechselwirkung zugrunde liegt, besteht darin, daß Strahlungsenergie umgewandelt wird in potentielle Energie eines Atoms, dem das betreffende Elektron angehört, und eventuell in kinetische Energie des Elektrons nach der Abtrennung vom Atom. Wenn wir uns auf die am häufigsten vorkommenden Prozesse der letzteren Art, d. h. also auf solche Wirkungen beschränken, die eine dauernde Veränderung der Materie hinterlassen, dann haben wir im Gebiete langer Wellen den gewöhnlichen photoelektrischen Prozeß vor uns. Wenn wir nach kurzen Wellen hin fortschreiten, dann tritt zum photoelektrischen Prozeß mit wachsender Häufigkeit etwa von mittelharten Röntgenstrahlen an ein zweiter ganz anderer Elementarprozeß hinzu, der Comptonsche Streuprozeß. Was können wir nun über den Verlauf dieser Elementarprozesse aussagen, die beide das gemeinsam haben, daß ein Elektron unter der Einwirkung der Strahlung von einem Atom abgetrennt und in Bewegung gesetzt wird? Eigentlich nicht mehr, als die einigermaßen begründete Behauptung, daß auch für den atomaren Prozeß die Gesetze von der Erhaltung von Energie und Impuls ihre Gültigkeit behalten, wenn man nämlich der beim Elementarprozeß wirksamen Strahlung die Energie  $h\nu$  und demzufolge den Impuls  $\frac{h \cdot \nu}{c}$  zuschreibt. Das Gesetz von der Erhaltung der Energie führt dann beim photoelektrischen Prozeß zu der bekannten Gleichung

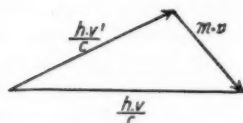
$$h\nu = A + \frac{m}{2} v^2,$$

wo  $A$  die potentielle Energie des Atoms oder die „Ablösungsarbeit“ bedeutet. Beim Comptonschen Streuprozeß tritt

ein beträchtlicher Teil der umgesetzten Strahlungsenergie wieder als Strahlung, nämlich als Streustrahlung, auf; die Energiegleichung lautet demnach:

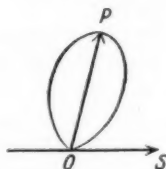
$$h \cdot \nu = h \cdot \nu' + \frac{m}{2} v^2,$$

wobei  $\nu'$  die gestreute Frequenz bedeutet. (Dabei ist eine eventuelle Ablösungsarbeit als sehr klein gegen  $h \cdot \nu$  vernachlässigt!) Was nun die Impulsgleichung anbetrifft, so liefert sie im zweiten Falle ganz eindeutig die Richtung, unter der das Elektron *relativ zur Strahlrichtung* emittiert wird. Der Impuls des Elektrons  $m \cdot v$  ist ja gegeben als dritte Seite des Impulsdreiecks mit den beiden Seiten  $\frac{h \cdot \nu}{c}$  und  $\frac{h \cdot \nu'}{c}$  (Fig. 1).



Impulsdreieck  
für den Comptonen  
Streuprozess

Fig. 1



OS Strahlrichtung  
OP Mittlere Emissionsrichtung der  
Photoelektronen  
Richtungsverteilung der Photoelektronen  
in bezug auf den Primärstrahl  
nach Bothe und Auger

Fig. 2

Nicht so einfach liegt die Sache beim Photoeffekt und zwar offenbar deswegen, weil hier die Eigenbewegung des Elektrons im Atom vor der Auslösung mitbestimmend ist für die Emissionsrichtung. Beim Photoeffekt ist ja durch die Versuche von Bothe<sup>1)</sup> und Auger<sup>2)</sup> nachgewiesen worden, daß eine ganz bestimmte Richtungsverteilung der Emission in bezug auf die Strahlrichtung existiert; etwa derart, wie sie in Fig. 2 dargestellt ist.

Immerhin macht sich auch hier das Wirken des Impulserhaltungsgesetzes bemerkbar: die mittlere Emissionsrichtung, um die sich alle übrigen gleichmäßig gruppieren, ist nämlich

1) W. Bothe, Ztschr. f. Phys. 26. S. 59. 1924.

2) P. Auger, Compt. rend. 180. S. 1939. 1925.

dadurch charakterisiert, daß hier die Vorwärtskomponente des Elektronenimpulses gerade gleich dem Strahlungsimpuls ist.

Man kann nun die beim Elementarprozeß zur Wirkung kommende Strahlung außer durch die Frequenz und die Strahlrichtung noch durch den Polarisationszustand charakterisieren — und damit entsteht sofort die Frage: wie hängt die Emissionsrichtung der Elektronen bei den beiden Prozessen mit dem Polarisationszustand der Strahlung zusammen?

Da bisher Experimente zu dieser Frage nur über den Photoeffekt polarisierter Röntgenstrahlen in Luft vorliegen<sup>1)</sup>, habe ich mir die planmäßige Untersuchung der Emissionsrichtung bei *beiden* Prozessen zur Aufgabe gesetzt. Die vorliegende erste Mitteilung soll über die Ergebnisse der Streuversuche an polarisierten Röntgenstrahlen und über Kontrollversuche mit unpolarisierten Fluoreszenzstrahlen berichten, während in einer zweiten Mitteilung über die jetzt noch nicht abgeschlossenen Untersuchungen des Photoeffekts berichtet werden wird.

### I. Versuchsanordnung

Zur Erzeugung linear polarisierter Röntgenstrahlen kann man bei den in Frage kommenden relativ harten Strahlen nur die ungeordnete Streuung unter  $90^\circ$  verwenden, da uns die Natur zur geordneten Reflexion solcher Strahlen unter  $90^\circ$  nicht genügend kleine Kristallgitterkonstanten zur Verfügung stellt. Die Intensität der polarisierten Röntgenstrahlen ist deshalb ihrer Größenordnung nach um mehrere Zehnerpotenzen kleiner als in einem direkt von der Röntgenröhre kommenden Bündel. Da man nun außerdem die Anfangsrichtung der von den Röntgenstrahlen ausgelösten Elektronen nur dann ungestört beobachten kann, wenn die Auslösung in einem Gase und nicht in einem festen Körper vor sich geht, wird die Ausbeute an beobachtbaren Elektronen offenbar sehr klein; zur Untersuchung kommt also nur eine solche Methode in Betracht, die es ermöglicht, alle in einem größeren Gasraum während einer nicht zu kurzen Zeit ausgelösten Elektronen tatsächlich auf ihre Anfangsrichtung hin zu untersuchen. Diesen Ansprüchen genügt die von C. T. R. Wilson ausgearbeitete Nebelkammermethode. Da die Anfangsrichtung

1) F. W. Bubb, Phys. Rev. **23**. S. 137. 1924.

der Elektronenbewegung in bezug auf den elektrischen Vektor, d. h. also projiziert auf eine Ebene senkrecht zur Strahlrichtung, untersucht werden soll, müssen die photographischen Aufnahmen der Nebelspuren *in der Strahlrichtung* gemacht werden.

Die Versuchsanordnung ist in Fig. 3 schematisch dargestellt: (Grundriß, nur die Röntgenröhre ist im Aufriß gezeichnet).

$A$  ist die Wolframantikathode der Röntgenröhre, einer Glühkathodenröhre. Die Röhre wird mit der Siemensschen Hoch-

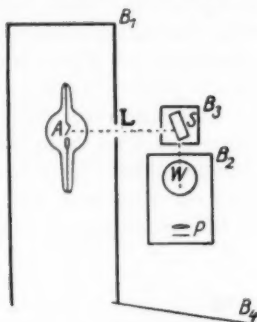


Fig. 3. Versuchsanordnung

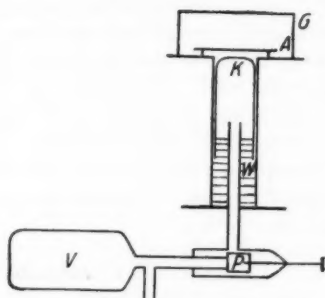


Fig. 4. Expansionsapparat

spannungs-, „Stabilivolt“-Anlage betrieben, und zwar gewöhnlich bei einer Stromstärke von 3—8 Milliamp.; sie befindet sich in einem großen, nur an einer Seite zur Spannungszuführung offenen Bleikasten  $B_1$  mit 4 mm dicken Bleiwänden. Die von  $A$  kommende Strahlung tritt bei  $L$ , wo nach Bedarf Filter eingeschaltet werden können, durch ein etwa 2·2,5 cm großes Loch aus dem Kasten heraus und fällt auf den Streukörper  $S$ , einen Paraffinblock. Der Streukörper ist wieder mit einem Bleimantel  $B_3$  umgeben, derart, daß nur der Weg für ein- und austretende Strahlung und für die unter  $90^\circ$  gestreute Strahlung freibleibt. Die unter  $90^\circ$  gestreute linear polarisierte Strahlung tritt durch ein Loch von etwa 1 cm Durchmesser in einen zweiten Bleikasten  $B_2$  ein, der noch besonders gegen aus dem Kasten  $B_1$  kommende verirrte Streustrahlung durch einen großen Bleischirm  $B_4$  geschützt ist. Im Kasten  $B_2$  befindet sich die Wilsonkammer  $W$  und der photographische Apparat  $P$ . Der Expansionsapparat hat die von C. T. R. Wilson ausgearbeitete Form (Fig. 4).

V bedeutet einen Vorratsraum, der mit einer Vorpumpe evakuiert werden kann. Er ist vor der Expansion durch den Gummistopfen *P* verschlossen; wird *P* nach rechts bewegt, so tritt das Vorrakuum mit dem Raum unter dem beweglichen Messingkolben *K* in Verbindung. Der hohle Kolben *K* ist durch Wasser (*W*) gegen den Messingzylinder, in dem er gleitet, gedichtet. An der Innenwand des Kolbens ist ein kleiner permanenter Magnet angelötet; dieser dient in Verbindung mit einer außen über einer Teilung spielenden Stahlnadel zur Feststellung der Anfangsstellung des Kolbens vor der Expansion (der Kolben ist von außen nicht sichtbar). Wird der Druck unter dem Kolben plötzlich verringert, dann bewegt sich der Kolben rasch nach unten; dabei wird der Raum über dem Kolben expandiert. *A* ist eine kreisrunde Aluminiumplatte, die die unvermeidliche Strömung bei der Expansion in eine solche Form zwingt, daß störende Wirbel weitgehend vermieden werden. *G*, die eigentliche Expansionskammer besteht einfach aus einer umgestürzten zylindrischen Glasschale (12,5 cm Durchmesser, 6 cm Höhe). Der Boden der Glasschale ist mit einer durch Borsäure leitend gemachten Gelatineschicht bedeckt, während die Rückwand der Schale — in Fig. 3 die dem Streukörper zugekehrte Seite — als Hintergrund für die Aufnahmen mit einer Mischung aus Gelatine und schwarzer Tusche überzogen ist. (Statt der einfachen zylindrischen Schale wurden auch solche Schalen gelegentlich benutzt, bei denen ein Teil der zylindrischen Wand herausgenommen und durch eine etwa 9·6 cm große planparallele Platte ersetzt war; dabei traten aber störende Strömungen stärker auf, als bei der rein zylindrischen Kammer — so daß die zur Beobachtung ausnutzbare Zeit zwischen dem Zeitpunkt der Expansion und dem Zeitpunkt der photographischen Aufnahme für die Versuche zu kurz wurde.) Zur Fernhaltung störender Ladungen aus dem Expansionsraum liegt zwischen der Aluminiumplatte *A* und der leitenden Gelatineschicht am Dach der Kammer eine Spannung von 110 Volt, die dem städtischen Leitungsnetz entnommen wird.

Zur Beleuchtung dient die Explosion eines etwa 7 cm langen, 0,1 mm dicken Wolframdrahtes. Dieser Draht ist in einem kleinen Holzkasten über der Wilsonkammer so angebracht, daß das Licht bei der Explosion schräg von oben

etwa unter einem Winkel von  $45^\circ$  zur Röntgenstrahlenrichtung in die Kammer eintritt. Die Beleuchtung ist nämlich dann am wirksamsten, wenn der Streuwinkel des in die photographische Kamera gelangenden Lichtes möglichst klein ist. Der Draht, der natürlich nach jeder Aufnahme erneuert werden muß, wird zwischen zwei Messingstifte leicht eingeklemmt. Die Explosion des Drahtes wird durch die plötzliche Entladung von zwei hintereinander geschalteten Kondensatoren von je 115000 cm bewirkt; die Kondensatoren werden dazu durch eine langsam laufende Influenzmaschine auf 30—40000 Volt aufgeladen. Der Entladungskreis ist auf der einen Seite geerdet; die Explosion wird durch plötzlichen Kurzschluß durch den Wolframdraht bewirkt.

C. T. R. Wilson hat schon in seinen ersten Arbeiten über die Nebelkammermethode gezeigt, daß es zur Erzielung brauchbarer Aufnahmen wichtig ist, daß Expansion, Röntgenstrahlendurchgang und photographische Aufnahme in den richtigen zeitlichen Abständen aufeinander folgen. Für unsere Aufgabe der Untersuchung der Streuelekttronen kommt wegen der geringen Intensität hinzu, daß möglichst die gesamte Zeit zwischen Expansion und photographischer Aufnahme zur Erzeugung von Spuren ausgenutzt werden muß; d. h. also möglichst während der ganzen Zwischenzeit sollen Röntgenstrahlen in die Wilsonkammer hineinfallen. Dies hat dann weiter zur Folge, daß man verhindern muß, daß die zu Anfang gebildeten (geladenen) Nebeltröpfchen im elektrischen Feld sich in Bewegung setzen, bevor sie photographiert sind; man muß also das elektrische Feld, das vor der Expansion an der Nebelkammer liegt, kurz nach der Expansion entfernen. Die einzelnen Ereignisse werden in die richtige zeitliche Aufeinanderfolge gebracht mit Hilfe eines schweren Sekundenpendels, das einige Kontakte betätigt und gleichzeitig einen Bleischirm mit einem Spalt durch den Röntgenstrahlengang zwischen Röntgenröhre und Streukörper hindurchbewegt. Wird das Pendel aus einer bestimmten Stellung losgelassen, dann besorgt es automatisch die Auslösung der folgenden Ereignisse: zuerst wird der Stromkreis eines Elektromagneten geschlossen, der den Gummistopfen *P* nach rechts bewegt und dadurch die Expansion bewirkt, dann wird ein Schalter geöffnet, der das elektrische Feld an der Nebelkammer wegnimmt; hierauf passiert der

Spalt des Bleischirmes den Röntgenstrahlengang, läßt also Strahlen in die Expansionskammer fallen und zum Schluß wird ein Relais betätigt, das den großen Kondensatorkreis durch den Wolframdraht hindurch kurz schließt, so daß der Draht explodiert und dabei den Expansionsraum beleuchtet.

Zur photographischen Aufnahme würde eine gewöhnliche, einfache Kamera genügen; zur besseren Orientierung ist aber die stereoskopische Betrachtung sehr vorteilhaft. Die verwendete Stereokamera (6·13 cm) ist mit Zeiss-Tessar-Objektiven mit einem Öffnungsverhältnis 1:4,5 ausgestattet; freilich kann man bei Aufnahmen in der Strahlrichtung nicht die volle Öffnung ausnutzen, weil man sonst nicht genügende Tiefenschärfe erhält. Es wurden gewöhnlich Hauffs Ultrarapidplatten verwendet.

## **II. Auswertungsverfahren**

Die Auswertung besteht darin, daß jeweils die Anfangsrichtung einer möglichst großen Zahl von Spuren ausgemessen wird. Da nur die Projektion der Anfangsrichtung auf eine Ebene senkrecht zur Röntgenstrahlenrichtung bestimmt werden soll, genügt es, den Winkel zwischen der Anfangsrichtung der Spur und einer festen Richtung (z. B. der Richtung des elektrischen Vektors) auf der photographischen Platte zu messen. Zu diesem Zweck wird eine mit einer Winkelteilung versehene Zelluloidscheibe auf die Originalplatte aufgelegt und mit Hilfe eines im Zentrum der Scheibe befestigten Fadens die Anfangsrichtung jeder einzelnen Spur auf der Teilung abgelesen. Nun kann man natürlich nur solche Spuren bei der Ausmessung berücksichtigen, die man — eventuell mit Hilfe der stereoskopischen Betrachtung — einwandfrei identifizieren kann; gerade in dieser Auswahl der zur Ausmessung geeigneten Spuren liegt aber zweifellos eine gewisse Willkür, die unter Umständen zu einer subjektiven Verzerrung der Richtungsverteilung führen kann. Um diese Fehlerquelle nach Möglichkeit auszuschalten, ist es, besonders bei zweifelhaften Fragen, unbedingt notwendig, daß die Ausmessungsarbeit von solchen Beobachtern besorgt wird, denen das in Frage stehende Problem überhaupt nicht bekannt ist, die insbesondere nichts von einem elektrischen Vektor bzw. einer Vorzugsrichtung wissen. Die Einzelmessungen kann man schließlich entweder zusammenfassen

in der Weise, daß man auszählt, wieviel Anfangsrichtungen in gewisse gleiche Winkelbereiche hineinfallen, oder in der Weise, daß man von einer festen Richtung ausgeht und alle Spuren addiert, die zwischen diese feste Richtung und eine fortschreitende Richtung hineinfallen. Während das erstere Verfahren, das bei einem kurzen vorläufigen Bericht<sup>1)</sup> über die Resultate dieser Untersuchung verwendet wurde, den Vorzug der besseren Anschaulichkeit hat, gestattet das zweite eine genauere Darstellung der unmittelbaren Ergebnisse der Winkelmessung. Bei der Auswertung ist schließlich noch zu berücksichtigen, daß die Polarisierung der unter 90° gestreuten Strahlen — wie Barkla schon bei den ersten Polarisationsversuchen festgestellt hat — nicht vollständig ist. Die Strahlen sind zum Teil depolarisiert, und zwar erstens aus geometrischen Gründen und zweitens wegen der Mehrfachstreuung. Die geometrischen Gründe für die Depolarisation sind kleine Abweichungen vom Streuwinkel 90° infolge der endlichen Ausdehnung des Streukörpers. Für unsere Versuchsbedingungen berechnet sich aus dem gesamten Öffnungsverhältnis 5:12 der in der Wilsonkammer zur Wirkung kommenden Strahlen ein unpolarisierter Anteil

$$J = \frac{J_0}{\arctg \frac{5}{12}} \cdot \int_{x=0}^{x=\arctg \frac{5}{12}} \sin^2 x \, dx = J_0 \cdot 0,05.$$

Den Anteil der Depolarisation, der auf Mehrfachstreuung zurückzuführen ist, haben Compton und Hagenow<sup>2)</sup> experimentell zu 15 Proz. bestimmt. Im ganzen sind also 5 + 15 = 20 Proz. der Gesamtstrahlung als depolarisiert anzusehen, während 80 Proz. linear polarisiert sind.

### III. Ergebnisse

Zu den Streuaufnahmen werden so harte Strahlen benutzt, daß der Streukoeffizient  $\sigma$  schon wesentlich größer ist als der wahre Absorptionskoeffizient  $\tau$ . Da Versuche von Compton und Simon<sup>3)</sup> gezeigt haben, daß die Streu-, bzw. Absorptions-Elektronenzahl den betreffenden Koeffizienten proportional

1) Phys. Zeitschr., Vortrag Naturforsch. Versamml. in Düsseldorf.

2) A. H. Compton u. C. F. Hagenow, Phys. Rev. 18, S. 97. 1921.

3) A. H. Compton u. Simon, Phys. Rev. 25, S. 306. 1925.



ist, können wir schließen, daß wir im wesentlichen Streuelektronen erhalten werden. An der Röntgenröhre liegt eine Spannung von 130—150 Kilovolt; die Strahlung wird durch 2,5 mm Kupfer und 2 mm Aluminium gefiltert. Der wesentliche Anteil der übrig bleibenden Strahlung liegt nach dem Ergebnis einer Orientierungsaufnahme mit einem Seemannsspektrographen zwischen 0,2 und 0,1 Å.-E. Für die weichste

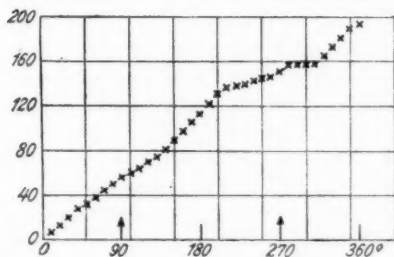


Fig. 5. Streuelektronen in Luft

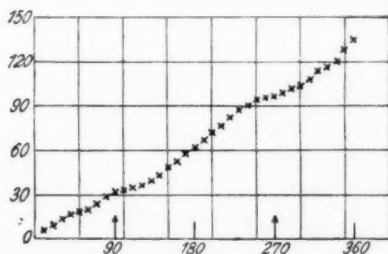


Fig. 6. Streuelektronen in Argon

im Strahlungsgemisch vorhandene Strahlung ist daher nach Compton und Simon  $\sigma/\tau$  in Luft etwa gleich 10. Die wenigen Spuren, die durch Absorption entstehen, können auch durch ihre besonders große Länge leicht von den anderen unterschieden werden. Es wurden Streuaufnahmen in atmosphärischer Luft und in Argon gemacht. Das unmittelbare Ergebnis der Ausmessung ist in den Figg. 5 und 6 gegeben. Als Abszisse ist dabei jeweils der Winkel gegenüber einer festen Richtung aufgetragen, und zwar so, daß der elektrische Vektor der polari-

sierten Strahlung bei  $90^\circ$  und  $270^\circ$  liegt. Die Ordinate gibt an, wieviel Spuren mit ihrer Anfangsrichtung zwischen die betreffende Richtung und die feste Richtung hineinfallen. Z. B. gibt die Ordinate, die in Fig. 5 zur Abszisse  $90^\circ$  gehört, an, daß 56 Spuren innerhalb eines Winkelbereichs von  $90^\circ$  von der festen Richtung 0 an gerechnet, liegen. Die Emission muß nun offenbar symmetrisch zum elektrischen Vektor liegen; wir können

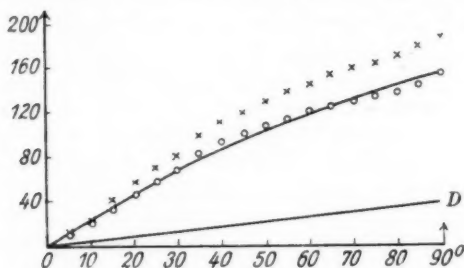


Fig. 7. Streuelektroden in Luft

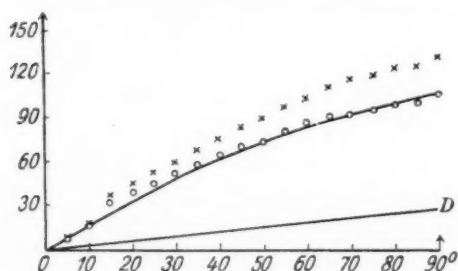


Fig. 8. Streuelektroden in Argon

demnach, um die Verteilung in bezug auf den elektrischen Vektor deutlicher zu erkennen, alles zusammen auf einen Quadranten reduzieren. Dadurch entstehen die Figg. 7 und 8, in denen der elektrische Vektor bei  $90^\circ$  liegt, die feste Richtung 0 also eine Richtung senkrecht zum elektrischen Vektor bedeutet. (Aus dieser Figur kann die Zahl der in einzelne Winkelbereiche fallenden Spuren unmittelbar als Differenz von zwei Ordinaten abgelesen werden; in dieser Weise ist die Fig. 4 der oben zitierten kurzen Mitteilung in der Phys. Zeitschr. entstanden.) Die

Gerade  $D$  gibt den depolarisierten Teil der Strahlung (20 Proz. der Gesamtstrahlung); die reduzierten Werte (durch Kreise markiert), die durch Differenzbildung aus den ursprünglichen Werten (Kreuze) und der Geraden entstehen, geben schließlich die Verteilung bei vollständig linear polarisierter Strahlung. Die wirkliche Verteilungskurve würde man durch Differentiation der durch die reduzierten Werte gegebenen Kurve erhalten; der stärkste Anstieg der letzteren Kurve in Richtung senkrecht zum elektrischen Vektor bedeutet, daß diese Richtung eine Vorzugsrichtung für die Emission der Streuelektronen darstellt.

Welche Richtungsverteilung haben wir nun theoretisch zu erwarten? Nach der klassischen Elektrodynamik wirkt auf ein Elektron, dessen Bindungskräfte so gering sind, daß es praktisch als frei gelten kann, beim Passieren einer linear polarisierten elektromagnetischen Strahlung nur eine elektrische Kraft  $e \cdot \mathcal{E}$  in der Richtung des elektrischen Vektors und eine magnetische Kraft (als Strahlungsdruck), die in die Strahlrichtung weist. Demnach kann die rein klassische Berechnung des Comptoneffekts überhaupt keine Bewegung der Streuelektronen in einer Richtung senkrecht zum elektrischen Vektor liefern — in der Richtung, die nach dem Ergebnis des Experiments sogar eine Vorzugsrichtung darstellt. Bezüglich der Verteilung der Streuelektronen versagt also offenbar die klassische Rechnung<sup>1)</sup>; sie gibt dagegen Aufschluß, wenigstens in großen Zügen, über die Verteilung der Streustrahlung — in Übereinstimmung mit dem bekannten Experiment Barklas: die Streustrahlung besitzt ein Maximum in der Richtung senkrecht zum elektrischen Vektor. Wenn wir also der Streustrahlung eine Elektronenemission zuordnen, die mit Streustrahl und Primärstrahlrichtung in derselben Ebene liegt — d. h., wenn wir für den elementaren Streuprozess die Gültigkeit des Impulserhaltungssatzes fordern, dann erhalten wir auch für die Elektronenemission ein Maximum in der Richtung senkrecht zum elektrischen Vektor — in Übereinstimmung mit unserem experimentellen Ergebnis. In sehr

1) Vgl. G. Beck, *Zeitschr. f. Phys.* **38**, S. 144. 1926. Es sei hier jedoch darauf hingewiesen, daß O. Halpern (*Zeitschr. f. Phys.* **38**, S. 149. 1926), die Vermutung ausgesprochen hat, daß die Einarbeitung der „Strahlungsreaktion“ in die klassische Theorie des Comptoneffekts wahrscheinlich doch eine Kraftkomponente in der Richtung des magnetischen Vektors liefern würde.

anschaulicher Weise wirkt der Impulserhaltungssatz in der extremen Lichtquantentheorie, die den elementaren Streuprozess bekanntlich einfach als Stoßvorgang beschreibt; dadurch wird jedem gestreuten  $h \cdot \nu$ -Quantum ein Elektron zugeordnet, das mit  $h \cdot \nu$ -Quantum und einfallender Strahlrichtung in einer Ebene liegt. Aber auch die neuere Quantenmechanik scheint nach Ansätzen von Dirac<sup>1)</sup> den Impulserhaltungssatz für den Elementarprozeß zu liefern. Welche Richtungsverteilung in bezug auf den elektrischen Vektor haben wir

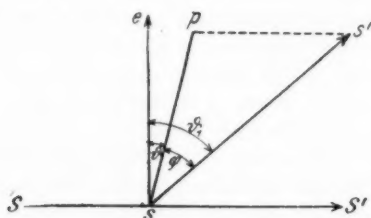


Fig. 9

nun bei Gültigkeit des Impulserhaltungssatzes für unsere Versuchsbedingungen zu erwarten, bei denen alle Anfangsrichtungen auf die Ebene senkrecht zur Strahlrichtung projiziert werden? Offenbar eine Verteilung, die durch die gesamte Streustrahlungsintensität bestimmt ist, wenn wir diese auf die Ebene senkrecht zur Strahlrichtung projizieren. Es sei in der Fig. 9  $S S'$  die Strahlrichtung,  $s s'$  irgendeine Streustrahlrichtung  $s p$  die Projektion dieser Richtung auf die Ebene senkrecht zur Primärstrahlrichtung und  $s e$  der elektrische Vektor. Dann ist

$$\cos \vartheta_1 = \cos \vartheta \cdot \cos \varphi.$$

Wäre überhaupt nur Streustrahlung in der Ebene senkrecht zur Strahlrichtung vorhanden, d. h. wäre  $\varphi$  stets gleich 0, dann wäre die Intensitätsverteilung der Strahlung nach der klassischen Elektrodynamik, und daraus auch die Richtungsverteilung der Streuelektren nach der Lichtquantenvorstellung, gegeben durch

$$J_\vartheta = J_0 \cdot \sin^2 \vartheta.$$

1) P. Dirac, Proc. Roy. Soc. 111, S. 405, 1926.

Nun messen wir aber unter irgendeinem Winkel  $\vartheta$  auch alle jene Elektronen mit, die einer Streustrahlrichtung

$$(\vartheta; \varphi = -\pi/2 \text{ bis } +\pi/2)$$

entsprechen. Wenn also

$$J_{\vartheta_1} = J_0 \cdot \sin^2 \vartheta_1 = J_0 (1 - \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi)$$

ist, dann haben wir über alle Werte von  $\varphi$  von  $-\pi/2$  bis  $+\pi/2$  zu integrieren:

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} J_0 (1 - \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi) d\varphi.$$

Nun ist

$$\int \cos^2 \varphi d\varphi = \varphi/2 + 1/4 \cdot \sin 2\varphi,$$

daher wird das Integral:

$$J_0 (\pi - \cos^2 \vartheta \cdot \pi/2) = J_0 \cdot \pi/2 (1 + \sin^2 \vartheta).$$

Dieses Resultat gilt also für die klassische Intensitätsverteilung; die wirkliche Streustrahlungsintensität weicht nun bekanntlich von der klassischen in dem Sinne ab, daß die Streustrahlung nach vorwärts intensiver ist als nach rückwärts; der einfachste Weg, dieser Tatsache Rechnung zu tragen, ist wohl der von Debye vorgeschlagene.<sup>1)</sup> Nach der korrespondenzmäßigen Betrachtung Debyes wäre die Verkleinerung der Streustrahlungsintensität nach rückwärts durch die Verminderung der  $h \cdot \nu$ -Energie verursacht, während die Zahl der  $h \cdot \nu$ -Quanten durch die klassische Rechnung gegeben wäre. (Für die Intensität der Streustrahlung folgt daraus, wie leicht ersichtlich,  $J_{\text{Quant.-th.}} = J_{\text{Klass.}} \cdot \frac{\nu}{\nu_0}$ , wenn  $\nu$  die gestreute Frequenz und  $\nu_0$  die Primärfrequenz bedeuten.) Nach der Debyeschen Intensitätsverteilung soll also unsere oben abgeleitete Gleichung für  $J_{\vartheta}$  in der Tat die gemessene Richtungsverteilung wiedergeben, d. h. es soll sein

$$n_{\vartheta} = n_0 (1 + \sin^2 \vartheta),$$

oder, wenn wir statt  $\vartheta$  den in Fig. 7 und 8 benutzten Winkel  $\Theta = \pi/2 - \vartheta$  einführen:

$$n_{\Theta} = n_0 (1 + \cos^2 \Theta).$$

1) P. Debye, Phys. Zeitschr. 24, S. 165. 1923.

Um nun dieses Ergebnis mit dem experimentellen Resultat in Fig. 7 und 8 vergleichen zu können, haben wir

$$\int_{\Theta=0}^{\Theta=\Theta} n_{\Theta} d\Theta$$

zu bilden und erhalten:

$$n_0 (3/2 \Theta + 1/4 \sin 2 \Theta) .$$

Die durch diesen Ausdruck dargestellte Kurve (ausgezogen) ist in die Figg. 7 und 8 eingetragen; sie gibt die Beobachtungen recht befriedigend wieder. Nun scheint freilich eine neuere von Dirac vorgeschlagene Formel

$$J_{\text{Quant.}} = J_{\text{Klass.}} \cdot \left( \frac{\nu}{\nu_0} \right)^3$$

den Beobachtungen über die Streustrahlenintensität noch besser gerecht zu werden als die oben benutzte Debyesche; die Unterschiede zwischen den beiden Formeln in dem hier benutzten Wellenlängenbereich sind aber noch relativ klein, so daß wir uns eine nähere Diskussion sparen können.

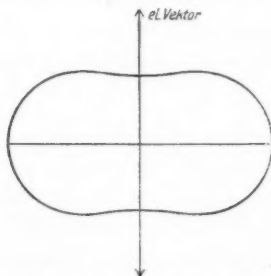


Fig. 10. Azimutale Richtungsverteilung der Streuelekttronen

Zur anschaulichen Darstellung der gefundenen Richtungsverteilung ist in Fig. 10 noch die wirkliche Verteilungskurve gezeichnet unter der Annahme, daß die obige Formel die Beobachtungen richtig darstellt. In dieser Figur gibt also der radius vector nach irgendeinem Kurvenpunkt direkt die Häufigkeit der Elektronenemission in der betreffenden Richtung.

Schließlich sollen die Ergebnisse von Aufnahmen mit Fluoreszenzstrahlung, also unpolarisierter Strahlung besprochen

werden, die in gewisser Hinsicht als Kontrollversuche dienten. Die Aufnahmen wurden in der Weise gewonnen, daß bei im übrigen völlig unveränderter Apparatur der Streukörper (Paraffinblock) mit einem dünnen Silberblech bedeckt wurde. Bei einem solchen „Streukörper“ überwiegt bekanntlich die unpolarisierte Fluoreszenzstrahlung bei weitem die gewöhnliche Streustrahlung. Als Füllung der Expansionskammer wurde zu diesen Versuchen Argongas gewählt; beobachtet und ausgemessen wurden die Photoelektronen der Fluoreszenzstrahlung. Dabei machte sich übrigens der von Auger<sup>1)</sup> näher untersuchte „zusammengesetzte Photoeffekt“ dadurch bemerkbar, daß sehr häufig der Anfang der Spur eine Verdickung trug.

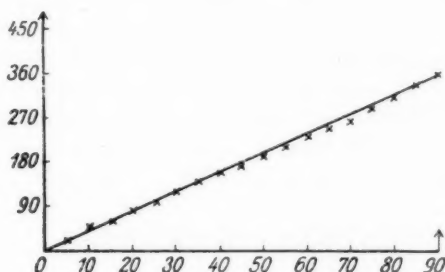


Fig. 11. Fluoreszenzstrahlung

Die Spuren zeigten, wie C. T. R. Wilson das schon für entsprechende Aufnahmen in atmosphärischer Luft festgestellt hatte, praktisch alle annähernd gleiche Länge (etwa 9—11 mm).

Die Ausmessung der Anfangsrichtungen ergab das in Fig. 11 dargestellte Resultat. Die durch die Figur gelegte gerade Linie zeigt gleichmäßige Verteilung der Anfangsrichtungen an, wie wir sie für unpolarisierte Strahlung zu erwarten hatten. Der Versuch bestätigt also, daß die Fluoreszenzstrahlung unpolarisiert ist und gibt umgekehrt eine Kontrolle dafür ab, daß die Ausmessung der Anfangsrichtungen nicht durch geometrische oder optische Fehlerquellen der Apparatur gefälscht wird.

1) P. Auger, Journ. d. Phys. et le Rad. VI, S. 205, 1925.

### **Zusammenfassung**

Die Comptonschen Streuelektronen polarisierter Röntgenstrahlen werden mit der Wilsonschen Nebelkammermethode photographiert. Dabei wird festgestellt, daß die Emission dieser Elektronen ein Maximum aufweist in der Richtung senkrecht zum elektrischen Vektor der Strahlung. Dieses Resultat fordert für den Comptonschen Elementarprozeß die Gültigkeit des Impulserhaltungssatzes, während die klassische Theorie des Comptoneffektes offenbar keine Erklärung zu geben vermag.

Die Elektronenemission der Fluoreszenzstrahlung von Silber zeigt unter den gleichen Versuchsbedingungen gleichmäßige Richtungsverteilung.

Den Hrn. Embirikos, Straub und K. Wien danke ich für ihre Unterstützung bei der Ausmessung der Platten; wir haben ferner zu danken der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft für die Überlassung der Hochspannungsanlage und dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Physik für die Gewährung von Mitteln zur Beschaffung von Apparaten.

München, Physik. Inst. d. Univ., Oktober 1926.

(Eingegangen 22. Oktober 1926.)

---



**14. Suszeptibilität der Gase, Curiesches Gesetz  
und Diamagnetismus der Flammengase;  
von W. Gerlach und E. Lehrer**

1. Es gibt eine Reihe von Methoden, um die paramagnetische oder diamagnetische Suszeptibilität von Gasen zu messen und zu demonstrieren. Eine Gruppe solcher Versuche besteht darin, die Ablenkung eines Gasstrahles, z. B. eines paramagnetischen Gases in einem diamagnetischen Gase, im inhomogenen Felde sichtbar zu machen. James Dewar<sup>1)</sup> benutzt zur Sichtbarmachung des Gasstrahles Veränderungen in einer dünnen Seifenlamelle, auf welche der Gasstrahl auftrifft. Unter der Einwirkung des magnetischen Feldes auf den Gasstrahl verlagert sich dann die Ausgangsstelle der Veränderung der Seifenblase. Auch die Schlierenmethode hat man zum Nachweis des Gasstrahles und seiner magnetischen Verlagerung verwendet.

Während bei diesen Versuchen die Kraft zur Wirkung kommt, welche zwischen einem dia- und paramagnetischen Gase im inhomogenen Felde auftritt, wird mit den im folgenden beschriebenen Versuchen die Kraft gemessen, welche zwischen zwei Volumteilen desselben Gases im inhomogenen Magnetfeld besteht, wenn diese sich auf verschiedener Temperatur befinden. Diese Kraft ist bei paramagnetischen Gasen groß wegen der zweifachen Abhängigkeit von der Temperatur, indem Temperaturerhöhung einmal die Dichte herabsetzt, dann aber auch gemäß dem Curieschen Gesetz die spezifische Suszeptibilität umgekehrt proportional der absoluten Temperatur ist. Bei diamagnetischen Gasen fällt die letztere Temperaturabhängigkeit weg. Da zudem ihre Suszeptibilität sehr klein ist, wird auch der Effekt nur *sehr* klein.<sup>2)</sup>

1) J. Dewar, *Proceed. Roy. Inst.* **24**, part. I.

2) Bez. der absoluten Messung dieser Kraft s. E. Lehrer, *Ann. d. Phys.* **81**, S. 229. 1926.

2. M. Faraday hat mannigfach variierte Methoden angegeben, um die Kraftwirkung im inhomogenen Magnetfeld auf einen Gasstrahl höherer Temperatur im umgebenden Gase niedriger Temperatur zu messen, die auf dem Nachweis der Ver-

lagerung des warmen Gasstroms bzw. der Verschiebung des Temperaturgradienten beruhen.<sup>1)</sup> Hierzu soll zunächst eine einfache Anordnung beschrieben werden, mit welcher also das Curiesche Gesetz demonstriert werden kann. Sie beruht darauf, daß ein warmer Luftstrahl in einem inhomogenen Magnetfeld aufsteigend, in Richtung der Inhomogenität abgelenkt wird. Die Verlagerung des warmen Luftstrahles wird mit einem Differentialthermoelement nachgewiesen.

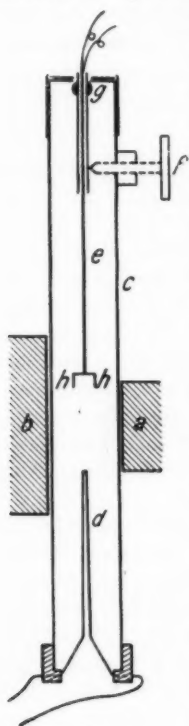


Fig. 1

0,5 cm frei im Gase hängen. Sie liegen mit der Spitze des Heizblechs und dem Schneidepol des Magneten in einer Ebene.

1) Exp. Res. 1848 S. 71ff. in Band 140 von Ostwalds Klassikern. Faraday war das Curiesche Gesetz noch nicht bekannt; er unterschied auch noch nicht zwischen diamagnetischen und paramagnetischen Gasen. Vgl. Abs. 7 dieser Mitteilung. Tatsächlich hat Faraday stets nur den Effekt paramagnetischer Gase beobachtet, also das Curiesche Gesetz, während er stets von Diamagnetismus spricht.

4. Wird das Heizband auf etwa  $300^{\circ}$  gebracht, so steigt von ihm ein vertikaler Luftstrom auf, welcher nach einigen Minuten stationär ist. Durch Neigen des Thermoelements ist leicht zu erreichen, daß beide Lötstellen in Gegenden gleicher Temperatur liegen, das Thermoelementgalvanometer also auf Null steht (Empfindlichkeit des Instruments  $10^{-3}$  bis  $10^{-4}$  Amp. pro Skt.). Erregt man jetzt den Magneten, so schlägt das Galvanometer *sofort* aus; denn jetzt wird der warme Luftstrom in Richtung der Inhomogenität, deren größter Wert in der genannten Schneideebene liegt, abgelenkt. Es bildet sich sofort eine stationäre Lage des abgelenkten Stromes aus. Richtung und Größe der magnetischen Ablenkung, die unabhängig von der Feldrichtung ist, erhält man durch Messung der zur Wiedererreichung des Galvanometernullpunktes erforderlichen Verschiebung des Thermoelements mit der Schraube.<sup>1)</sup> Dieser Versuch eignet sich wegen seiner großen Sicherheit und äußerst einfachen Herstellbarkeit sehr als Vorlesungsversuch.

5. Die zweite Methode beruht auf der Beobachtung der Ablenkung des Gasstrahles selbst auf seiner ganzen Länge. Der warme Gasstrom wird sichtbar gemacht dadurch, daß man ihm etwas Quecksilberdampf zumischt und die Absorption der Quecksilberresonanzstrahlung durch den mit Quecksilber vermischten warmen Gasstrom beobachtet. Zur Erzeugung dieses Gasstromes dient der einfache in Fig. 2 gezeichnete Apparat. *c* ist ein in eine feine Spitze ausgezogenes Glasröhrchen, mit Heizdraht umwickelt. Es ist in einem Glas- oder Metallrohr *a* angebracht, welches bei *b* vorn und hinten je eine Öffnung hat, die mit Quarzplatten verschlossen sind. Das Rohr sitzt vertikal

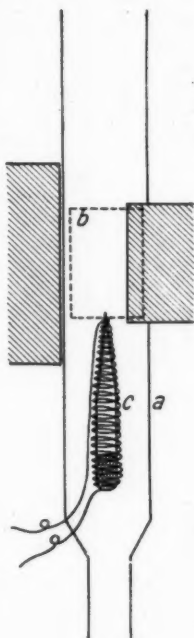


Fig. 2

1) In der Vorlesung wird diese Größe in der Projektion gemessen.

zwischen Schneide- und Plattenpol eines Magneten. Zur Beobachtung des Gasstromes dient die Anordnung, die in Fig. 3 skizziert ist (Längsschnitt). Über einer Quecksilberdampflampe *L* von Heraeus, welche in einem Gefäß mit Wasser brennt, befindet sich ein kleines Quarzkölbchen *R* von einigen Kubikzentimeter Inhalt, das einige Tropfen Quecksilber enthält und gut evakuiert ist. Das Licht dieser Resonanzlampe beleuchtet durch eine Quarzlinse den Raum zwischen dem Schneiden- und Plattenpol des Elektromagneten, in welchem sich das Rohr *a* (Fig. 3) befindet. Mit einer zweiten Quarzlinse wird der Strahl in *a* auf den Fluoreszenzschirm *s* abgebildet. Der Fluoreszenzschirm wird durch das Resonanzlicht zum Leuchten angeregt.

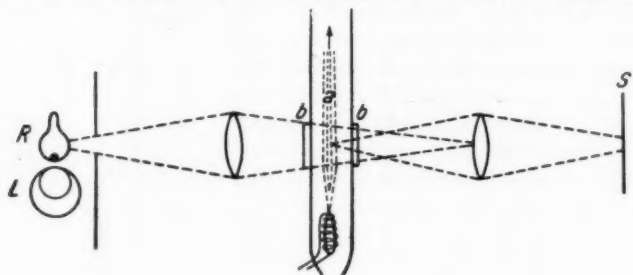


Fig. 3

Da dieses aber von dem Quecksilber enthaltenden Gasstrahl absorbiert wird, zeichnet sich auf dem Leuchtschirm scharf der Schatten des Gasstrahles ab.

6. Ohne Magnetfeld beobachtet man einen ruhig stehenden Strahl. Die folgenden Figuren sind Photographien des Strahles mit einem improvisierten photographischen Apparat mit Quarzlinse.

Fig. 4a ist ein Luftstrahl.

Fig. 4b derselbe Strahl unter Wirkung eines inhomogenen Feldes. Die Feldstärke war etwa 3000 Gauß, die Inhomogenität etwa 2000 Gauß pro Zentimeter. Man erkennt auf der einen Seite den Schatten der scharfen Schneide und sieht die Ablenkung des Strahles von der Schneide weg.

Fig. 5a zeigt einen Sauerstoffstrahl ohne Magnetfeld.

Fig. 5b denselben Strahl in einem schwachen Felde.

Fig. 5c in starkem Feld und entsprechend größerer Inhomogenität.

Die Durchführung einer — wegen der schwer zu erfassenden Strömungsverhältnisse<sup>1)</sup> nur ungefähren — Berechnung führt zu der richtigen Größenordnung der Suszeptibilität bzw. zum Nachweis des Curieschen Gesetzes.

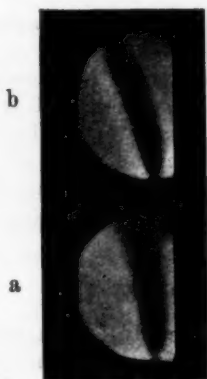


Fig. 4



Fig 5

Es sei noch bemerkt, daß auch dieser zweite Versuch sich als Vorlesungsversuch eignet, da es leicht gelingt, ihn bei einer Größe des Fluoreszenzbildes von etwa 5 cm Durchmesser auch in einem großen Hörsaal zu demonstrieren.<sup>2)</sup>

7. Es seien noch einige Worte über den bekannten, in allen Lehrbüchern zu findenden Vorlesungsversuch von M. Faraday

1) Hierzu führt man einen Gasstrom gemessener Geschwindigkeit von unten nach oben durch ein Rohr, der sich an dem etwa 300° warmen Heizdraht des Hg-Gefäßes c erwärmt.

2) Es wird versucht, diese Methode auch zur experimentellen Behandlung anderer Strömungsvorgänge in Gasen zu verwenden.

über den „Diamagnetismus der Flammengase“ gesagt. Es wird die Ablenkung einer Flamme im inhomogenen Magnetfeld in Richtung der Inhomogenität beobachtet. Man kann leicht zeigen, daß aus *diesem Versuch nicht auf den Diamagnetismus der Flammengase geschlossen werden darf*. Die auf einen Gasstrom wirkende Kraft ist *et. par.* proportional der Differenz der Suszeptibilität des Gasstromes und der des umgebenden Mediums. Dieses sei Luft, deren Suszeptibilität  $\kappa_1 = 0,029 \cdot 10^{-6}$  ist (für 20° C und 760 mm); die Suszeptibilität der — diamagnetisch angenommenen — Flammengase ist so klein, daß sie gegen  $\kappa_1$  zu vernachlässigen ist. Die ablenkende Kraft ist also:

$$K_1 = C \cdot \kappa_1 = 0,029 \cdot 10^{-6} \cdot C$$

$C$  ist eine von Feld und Versuchsanordnung abhängige Konstante.

Nun ist aber um die Flamme herum die Luft erwärmt, es strömen also nicht nur Flammengase, sondern auch erwärmte Luft nach oben. Nimmt man die Temperatur der Luftschicht um die Flamme herum zu nur 1000° abs. an, so ist deren Suszeptibilität  $\lambda$  wegen Dichte und Temperaturabhängigkeit — nach dem Curieschen Gesetz —  $\kappa_2 = \kappa_1 \frac{T_1^3}{T_2^3} = 0,0025 \cdot 10^{-6}$ , die ablenkende Kraft also:

$$K_2 = C (\kappa_1 - \kappa_2) = 0,0265 \cdot 10^{-6} \cdot C$$

$K_2$  ist also nur kaum 10 Proz. kleiner als  $K_1$ , d. h. man kann zwischen der diamagnetischen Abstoßung der Flammengase und der auf Grund des Curieschen Gesetzes bedingten Abstoßung der erhitzten Luft in und um die Flamme nicht unterscheiden. Wie weit die beiden Effekte bei dem gewöhnlichen Flammenversuch vermischt sind, hängt von den bei ihrer Unübersichtlichkeit nicht zu definierenden Versuchsbedingungen ab.

#### Zusammenfassung

1. Es werden zwei einfache Versuche zum Nachweis des Curieschen Gesetzes der paramagnetischen Gase beschrieben.
2. Der bekannte Versuch zum Nachweis des „Diamagnetismus der Flammengase“ ist nicht eindeutig.

Tübingen, Physikalisches Institut, im Oktober 1926.

(Eingegangen am 27. Oktober 1926)

15. *Über die Ausbreitung der Wellen  
in der drahtlosen Telegraphie;  
von A. Sommerfeld*

Unter dem gleichen Titel habe ich im 28. Bande dieser Annalen das Problem der *Vertikalantenne* bei beliebiger (aber homogener) Bodenbeschaffenheit und bei ebener Begrenzung der Erde behandelt, wobei die Antenne für ihre Wirkung auf große Entfernungen als einfacher Hertzscher Dipol idealisiert werden durfte. H. v. Hoerschelmann untersuchte sodann in seiner Münchner Dissertation<sup>1)</sup> das Problem der *Horizontalantenne*, genauer der geknickten Marconiantenne, bei der das wesentliche der aus einem System langer Kabel bestehende horizontale Ast ist. Das Resultat beider Arbeiten (im folgenden mit a. a. O. zitiert) wird hier systematisch zusammengefaßt und vereinfacht. Außerdem möchte ich zeigen, daß das sozusagen duale Problem einer „magnetischen Antenne“ von vertikaler bzw. horizontaler Achse, d. h. einer Rahmenantenne von horizontaler bzw. vertikaler Ebene der Wickelungen, einer ganz entsprechenden Behandlung fähig ist, wobei ich hervorheben möchte, daß ich auf die Möglichkeit, Rahmenantennen als magnetische Linearantennen aufzufassen, von Hrn. H. Barkhausen bei gemeinsamen Arbeiten während des Krieges hingewiesen worden bin. Natürlich ließe sich die Rahmenantenne, entsprechend den vier Seiten des Rahmens, auch durch vier in der Ebene des Rahmens gelegene und der Phase nach verschobene elektrische Dipole darstellen; doch würde diese Darstellung mathematisch weniger einfach werden und die Analogie zur elektrischen Antenne nicht zum deutlichen Ausdruck bringen.

Während das Hauptinteresse der Theorie der drahtlosen Telegraphie bisher naturgemäß auf den Sender und Empfänger selbst gerichtet war (Resonanzverhältnisse im primären und sekundären Kreis, Wirkungsweise der Löschfunken oder der

1) Vgl. auch Jahrbuch d. drahtl. Tel. 5, S. 14 und 188, 1912.

Elektronenröhren), nehmen gegenwärtig die Vorgänge zwischen Sender und Empfänger, also die eigentlichen Ausbreitungsvorgänge ein besonderes Interesse in Anspruch. Im Vordergrund steht hier bekanntlich die Frage nach der Wirkung der Atmosphäre und ihrer Schichtung. Diese Frage liegt allerdings außerhalb des Programms der gegenwärtigen Arbeit, hängt aber insofern mit ihr zusammen, als zu ihrer Entscheidung der Einfluß der Erde genau beurteilt und durch übersichtliche Formeln dargestellt werden muß. Ich hoffe, daß in dieser Hinsicht die gegenwärtige Arbeit bessere Dienste leisten wird als die früheren noch recht schwerfälligen Darstellungen. Eine ausführlichere Bearbeitung des Gegenstandes findet man auch in der neuen Auflage des Lehrbuchs von Riemann-Weber, Kap. 16 (unter der Presse).

Zur mathematischen Formulierung sei folgendes vorausgeschickt: Das elektromagnetische Feld  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$  kann sowohl bei der elektrischen wie bei der magnetischen Antenne abgeleitet werden aus einem „Hertzschen Vektor“  $\Pi$ , dessen rechtwinklige Komponenten bei rein harmonischer Zeitabhängigkeit<sup>1)</sup> von der Kreisfrequenz  $\omega$  der Differentialgleichung genügen:

$$(1) \quad \Delta \Pi + k^2 \Pi = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} k^2 = k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \text{ in Luft, } z > 0, \\ k^2 = \frac{\epsilon \omega^2 + i \sigma \omega}{c^2} \text{ in Erde, } z < 0. \end{array} \right.$$

$\epsilon$  und  $\sigma$  bedeuten die Dielektrizitätskonstante und die (elektrostatisch gemessene) Leitfähigkeit des Erdbodens,  $c$  die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit. Die Permeabilität des Bodens haben wir gleich 1 gesetzt. Aus  $\Pi$  berechnet sich das Feld nach den Formeln

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{im elektrischen Falle} & \text{im magnetischen Falle} \\ \mathfrak{E} = \frac{-i c}{\omega} k^2 \operatorname{rot} \Pi & \mathfrak{E} = \frac{i \omega}{c} \operatorname{rot} \Pi \\ \mathfrak{H} = k^2 \Pi + \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi & \mathfrak{H} = k^2 \Pi + \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi \end{array} \right.$$

1) Diese denken wir uns durch den Faktor  $e^{-i\omega t}$  gegeben, der allen unseren Formeln hinzuzufügen ist und der ebenso wie das Zeichen des reellen Teils vor den komplexen Feldgrößen nicht hingeschrieben wird. Statt durch  $e^{-i\omega t}$  könnten wir den Zeitfaktor natürlich ebenso gut durch  $e^{+i\omega t}$  darstellen; doch würden dann an anderer Stelle (z. B. in der Formel für den Hertzschen Dipol) Minuszeichen auftreten, die unbequem sind.



Die primäre Erregung  $\Pi_{\text{prim}}$  werde als einfacher Dipol im Nullpunkt des Koordinatensystems angesetzt; der Abstand vom Dipol sei  $R$ , wobei  $R^2 = r^2 + z^2$ :

$$(3) \quad \Pi_{\text{prim}} = \frac{e^{i k_0 R}}{R} = \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}} J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} z} \dots z > 0.$$

Der Index 0 bei der „Wellenzahl“  $k_0$  deutet darauf hin, daß wir die primäre Erregung nur im Luftraum annehmen, für den Erdboden also  $\Pi_{\text{prim}} = 0$  setzen.

Wie a. a. O. näher ausgeführt wird, ist die hier gegebene Integraldarstellung der primären Erregung ( $J = J_0$  = Besselsche Funktion vom Index 0) für die Lösung unseres Problems besonders geeignet. Das Produkt  $J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} z}$  ist die einfachste Partikularlösung unserer Differentialgleichung (1), der „Wellengleichung“, in Polarkoordinaten  $r, \varphi, z$ . Allgemeinere Partikularlösungen ähnlicher Art werden uns in § 3 begegnen. Der Beweis der Formel (3) darf hier unter Hinweis auf die frühere Arbeit übergegangen werden. Wie H. Weyl<sup>1)</sup> ausführt, läßt sich die Integraldarstellung (3) auffassen als ein Bündel ebener Wellen.

Die zur primären hinzukommende sekundäre Erregung  $\Pi_{\text{sec}}$ , welche von dem Einfluß des Erdbodens herrührt, setzen wir in derselben Form an, wie die primäre Erregung, aber mit je einer verfügbaren Funktion  $f_0(\lambda)$  für Luft und  $f(\lambda)$  für Erde und aus Konvergenzgründen mit umgekehrtem Vorzeichen von  $z$  für  $z \leq 0$ :

$$(4) \quad \Pi_{\text{sec}} = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}} f_0(\lambda) J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} z} \dots z > 0 \\ \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} f(\lambda) J(\lambda r) e^{+\sqrt{\lambda^2 - k^2} z} \dots z < 0. \end{cases}$$

Die gesamte Erregung ist dann

$$(5) \quad \begin{cases} \Pi_0 = \Pi_{\text{prim}} + \Pi_{\text{sec}} \dots z > 0, \\ \Pi = \Pi_{\text{sec}} \dots z < 0. \end{cases}$$

1) H. Weyl, Ann. d. Phys. 60. S. 481. 1919.

## § 1. Elektrische und magnetische Vertikalantenne

Obwohl die magnetische Vertikalantenne kein praktisches Interesse hat, behandeln wir sie hier gleichzeitig mit der elektrischen, um die Dualität beider Fälle zu veranschaulichen. Wir setzen  $\Pi = \Pi_z$  und haben nach den Gleichungen (2)

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{im elektrischen Falle} & \text{im magnetischen Falle} \\ \Phi_x = \frac{-ic}{\omega} k^2 \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad \Phi_y = \frac{+ic}{\omega} k^2 \frac{\partial \Pi}{\partial x} & \mathfrak{E}_x = \frac{i\omega}{c} \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad \mathfrak{E}_y = \frac{-i\omega}{c} \frac{\partial \Pi}{\partial x} \\ \mathfrak{E}_x = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z}, \quad \mathfrak{E}_y = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z} & \Phi_x = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z}, \quad \Phi_y = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z} \\ \Phi_z = 0, \quad \mathfrak{E}_z = k^2 \Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} & \mathfrak{E}_z = 0, \quad \Phi_z = k^2 \Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} \end{array} \right.$$

Die Grenzbedingungen für  $z = 0$  (Erdoberfläche) verlangen die Stetigkeit der tangentialen Komponente von  $\mathfrak{E}$  und  $\Phi$ . Dies liefert, wenn wir den Wert von  $\Pi$  in Luft durch den Index 0 auszeichnen und, was erlaubt ist, bezüglich  $x$  und  $y$  integrieren:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_0^2 \Pi_0 = k^2 \Pi \\ \frac{\partial \Pi_0}{\partial z} = \frac{\partial \Pi}{\partial z} \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} \Pi_0 = \Pi \\ \frac{\partial \Pi_0}{\partial z} = \frac{\partial \Pi}{\partial z} \end{array} \right.$$

Die Bedingungen (7) verlangen nun, wenn man beachtet, daß  $\partial \Pi_{\text{prim}} / \partial z$  für  $z = 0$  verschwindet, wegen (3), (4) und (5)

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_0^2 (1 + f_0) = k^2 f \sqrt{\frac{\lambda^2 - k_0^2}{\lambda^2 - k^2}} \\ f_0 + f = 0 \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} 1 + f_0 = f \sqrt{\frac{\lambda^2 - k_0^2}{\lambda^2 - k^2}} \\ f_0 + f = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = - \frac{k_0^2 \sqrt{\lambda^2 - k^2}}{N} \\ f = + \frac{k_0^2 \sqrt{\lambda^2 - k^2}}{N} \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} f_0 = - \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{N'} \\ f = + \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{N'} \end{array} \right.$$

$$\left[ N = k_0^2 \sqrt{\lambda^2 - k^2} + k^2 \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} \right] \quad \left[ N' = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} + \sqrt{\lambda^2 - k^2} \right].$$

Setzen wir in (5) ein, so ziehen sich die Ausdrücke für  $\Pi_{\text{prim}}$  und  $\Pi_{\text{sec}}$  zusammen und man erhält:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_0 = \int \frac{k^2 \lambda d\lambda}{N} J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} z} \\ \Pi = \int \frac{k_0^2 \lambda d\lambda}{N} J(\lambda r) e^{+\sqrt{\lambda^2 - k^2} z} \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} \Pi_0 = \int \frac{\lambda d\lambda}{N'} J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} z} \\ \Pi = \int \frac{\lambda d\lambda}{N'} J(\lambda r) e^{+\sqrt{\lambda^2 - k^2} z} \end{array} \right.$$

Dieses die Lösung unserer beiden Probleme in geschlossener und strenger Form. Zur Kontrolle betrachten wir zwei Sonderfälle:

a)  $k = k_0$ , homogenes Medium. Aus beiden Lösungen (9) entsteht  $\frac{1}{2} \Pi_{\text{prim}}$ , da

$$\frac{k^3}{N} = \frac{k_0^3}{N} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \quad \left| \quad \frac{1}{N'} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}} \right.$$

Die primäre Erregung, die wir zunächst nur in Luft voraussetzen, halbiert sich sozusagen, wenn wir sie auf Luft und Erde verteilen und die Materialunterschiede verschwinden lassen.

b)  $k = \infty$ , vollkommen leitende Erde. Aus der elektrischen Lösung (9) wird jetzt  $\Pi_0 = \Pi_{\text{prim}}$   $\Pi = 0$ , da

$$\frac{k^3}{N} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}, \quad \frac{k_0^3}{N} = 0.$$

Daß die Amplitude hier doppelt so groß wird, wie im Falle a) entspricht offenbar dem Umstande, daß man die Wirkung des vollkommenen Leiters durch Spiegelung berücksichtigen kann. Dagegen geht die magnetische Lösung über in  $\Pi_0 = \Pi = 0$ , d. h. die Wirkung einer Rahmenantenne, deren Wicklung parallel zum und unmittelbar über einem vollkommenen Leiter gelegen ist, wird durch die Wirbelströme im Leiter vernichtet. Schon dieser Umstand zeigt, daß die Fernwirkung der magnetischen Vertikalantenne schlecht ist.

## § 2. Diskussion: Oberflächenwellen, Formeln für kleine numerische Entfernung

Zwischen den Formeln (9) im elektrischen Falle einerseits, im magnetischen andererseits besteht ein durchgreifender Unterschied. Die Gleichung  $N = 0$  hat eine Wurzel  $\lambda = h$ , welche sich am übersichtlichsten berechnet in der Form

$$(10) \quad \frac{1}{h^2} = \frac{1}{k_0^2} + \frac{1}{k^2}.$$

Die Gleichung  $N' = 0$  hat keine Wurzel. Die Wurzel (10) stellt einen *Pol des Integranden* von (9) im elektrischen Falle dar. Man kann den Integrationsweg in die komplexe Ebene der Variablen  $\lambda$  deformieren und das Residuum im Pol bilden. Dadurch heben wir aus dem durch (9) dargestellten Wellenkomplex einen charakteristischen Bestandteil heraus, den wir *Oberflächenwelle* nennen. Im magnetischen Falle gibt es *keine Oberflächenwelle*. So wie  $k_0$  und  $k$  die Wellenzahlen (d. h. die

reziproken, eventuell komplexen Wellenlängen) von „Raumwellen“ in Luft und Erde bedeuten, so bedeutet  $h$  die Wellenzahl der Oberflächenwelle. Diese hängt in symmetrischer Weise von den Materialkonstanten beider Medien ab und charakterisiert die Welle schon dadurch als einen an die Grenze beider Medien gebundenen Vorgang. Auch die Amplitudenabnahme mit der Entfernung, die Dämpfungsverhältnisse usw. charakterisieren diesen Bestandteil unserer Lösung als Oberflächenwelle. Wir wollen hierauf indessen nicht eingehen, weil diese Verhältnisse in der früheren Arbeit ausführlich dargestellt wurden. Erwähnt sei nur noch, daß es vor der Deformation des Integrationsweges nötig ist, den Weg der Integrale in (9), der ursprünglich von 0 bis  $\infty$  zu führen war, zu ersetzen durch einen Weg von  $-\infty$  bis  $+\infty$ , was möglich ist, wenn man von der Besselschen Funktion  $J$  übergeht zu der ersten „Hankelschen Funktion“  $H$ , wie dies a. a. O. geschehen ist.

Dagegen wollen wir die früher für kleine „numerische Entfernung“ gegebenen Näherungsformeln jetzt etwas weiter führen, indem wir sie nicht nur für die Erdoberfläche ( $z = 0$ ), sondern allgemein entwickeln. Unter der numerischen Entfernung verstehen wir dabei die folgende reine Zahl

$$(11) \quad \varrho = (k_0 - h) i r,$$

die sich also aus der Wellenzahldifferenz zwischen Raum- und Oberflächenwelle berechnet. Nach (10) wird im Falle  $|k| \gg k_0$ :

$$(11a) \quad \varrho = \frac{k_0^3}{k^3} \frac{i k_0 r}{2}.$$

Wie man hieraus sieht, kann die numerische Entfernung auch bei großer absoluter Entfernung ( $k_0 r \gg 1$ , d. h.  $r$  = einer großen Anzahl von Wellenlängen) wegen des Faktors  $k_0^3/k^3$  klein sein. Wir bemerken noch, daß, wenn  $k$  rein imaginär ist (das Leitungsglied in (1) also groß gegen das dielektrische Glied ist)  $\varrho$  reell wird.

Indem wir uns auf den elektrischen Fall beschränken (die magnetische Vertikalantenne wird implicite in § 4 mitbehandelt werden) und indem wir  $|k| \gg k_0$  voransetzen, sehen wir im Nenner  $N$  das Glied mit  $k_0^2$  als Korrektionsglied an neben dem Gliede mit  $k^2$  und streichen in ersterem  $\lambda^2$  gegen  $k^2$ . Wir erhalten so

$$(11b) \quad N = k^2 (\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} - a), \quad a = \frac{i k_0^2}{k},$$

und schreiben statt (9):

$$(12) \quad \Pi_0 = \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} - a} J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} z}.$$

Um den Nenner fortzuschaffen, bilden wir  $\Pi_0 e^{az}$  und differenzieren nach  $z$ . Das Ergebnis läßt sich so schreiben:

$$e^{-az} \frac{\partial}{\partial z} (\Pi_0 e^{az}) = - \int \lambda d\lambda J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} z}.$$

Nach (3) ist dies identisch mit

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R} e^{i k_0 R} \right).$$

Daher wird

$$\frac{\partial}{\partial z} (\Pi_0 e^{az}) = e^{az} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R} e^{i k_0 R} \right).$$

Wir integrieren nach  $z$ , nennen die Integrationsvariable  $\zeta$  und wählen als untere Grenze einen Wert  $\Omega = \infty$ , für welchen das Integral nach  $\zeta$  konvergiert. So entsteht mit  $R_\zeta = \sqrt{r^2 + \zeta^2}$  nach Ausführung einer partiellen Integration

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \Pi_0 &= \frac{e^{i k_0 R}}{R} - a e^{-az} \int_{\Omega}^z e^{a\zeta} \frac{e^{i k_0 R_\zeta}}{R_\zeta} d\zeta \\ &\approx \frac{e^{i k_0 R}}{R} \left( 1 - a e^{-az} \int_{\Omega}^z e^{a\zeta} e^{i k_0 (R_\zeta - R)} d\zeta \right). \end{aligned} \right.$$

Dabei haben wir im Nenner  $R_\zeta$  mit  $R$  identifiziert mit Rücksicht darauf, daß in

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{r^2 + z^2} = r + \frac{1}{2} \frac{z^2}{r} + \dots \\ R_\zeta &= \sqrt{r^2 + \zeta^2} = r + \frac{1}{2} \frac{\zeta^2}{r} + \dots \end{aligned} \right\} R_\zeta - R = \frac{1}{2r} (\zeta^2 - z^2) + \dots$$

je das zweite Glied der Entwicklung wegen  $r \gg z$  ein Korrektionsglied ist. Indem wir noch den angegebenen Wert von  $R_\zeta - R$  in (13) eintragen, können wir auch schreiben:

$$(14) \quad \Pi_0 = \frac{e^{i k_0 R}}{R} \left( 1 - a e^{-az - \frac{i k_0 z^2}{2r}} \int_{\Omega}^z e^{a\zeta + \frac{i k_0 \zeta^2}{2r}} d\zeta \right).$$

Der Exponent von  $e$  wird nun je zu einem vollständigen Quadrat dadurch ergänzt, daß wir  $\pm \varrho$  hinzufügen: Es wird nämlich wegen (11a, b)

$$(15) \quad \begin{cases} \varrho + a\zeta + \frac{ik_0}{2r}\zeta^2 = \frac{ik_0}{2rk^2}(k_0r + k\zeta)^2 = u^2, \\ \varrho + az + \frac{ik_0}{2r}z^2 = \frac{ik_0}{2rk^2}(k_0r + kz)^2 = w^2. \end{cases}$$

$u$  und  $w$  sind neue Abkürzungen.  $u$  benutzen wir weiterhin als Integrationsvariable, wobei der unteren Grenze  $\Omega$  nunmehr  $u = i\infty$  entsprechen wird. Dabei ist nach (15)

$$d\zeta = \sqrt{\frac{2r}{ik_0}} du, \quad a\sqrt{\frac{2r}{ik_0}} = 2\sqrt{\varrho}.$$

Aus (14) wird somit

$$(16) \quad H_0 = \frac{e^{ik_0R}}{R} \left( 1 - 2\sqrt{\varrho} e^{-w^2} \int_{i\infty}^w e^{u^2} du \right).$$

Diese Darstellung wurde zuerst von H. Weyl in der S. 1137 zitierten Arbeit auf anderem Wege abgeleitet. Sie geht für  $z = 0$ , wo  $w^2 = \varrho$  wird, in meine ursprünglichen Formeln a. a. O. über. Kleines  $\varrho$  (bzw.  $w$ ) heißt nach (11), daß die Phasendifferenz zwischen Oberflächen und Raumwellen gering ist, daß also der Wellenkomplex als Ganzes fortschreitet. Gleichung (16) lehrt dann, daß die Erregung in diesem Falle in erster Näherung die des einfachen Dipols  $e^{ikR}/R$  ist. Für große numerische Entfernungen, wo Gleichung (16) ungültig wird, sondert sich der Wellenkomplex in Raum- und Oberflächenwellen und nimmt gleichzeitig in höherem Maße an Stärke ab.

Wichtige Schlüsse über das Verhalten der wellentelegraphischen Signale folgen, wie schon früher a. a. O. gezeigt, direkt aus dem Ausdruck der numerischen Entfernung, welcher eine Art *Ähnlichkeitsgesetz* der drahtlosen Telegraphie bedeutet. Alle Umstände, welche  $\varrho$  verkleinern, vergrößern die Empfangsstärke: Vergrößerung der Wellenlänge (bei homogener Atmosphäre, also ohne Heavisideschicht!), Vergrößerung der Leitfähigkeit des Bodens (Seewasser statt Süßwasser) usw.

## § 3. Horizontale elektrische und magnetische Antenne

Die Richtung der elektrischen Horizontalantenne sei die  $x$ -Achse, die der magnetischen die  $y$ -Achse. Wir setzen dementsprechend versuchsweise in den Gleichungen (2)  $\Pi = \Pi_x$  bzw.  $\Pi = \Pi_y$  und erhalten:

<p>im elektrischen Falle</p> $\mathfrak{H}_x = 0, \quad \mathfrak{H}_y = -\frac{ic}{\omega} k^2 \frac{\partial \Pi}{\partial x},$ $\mathfrak{E}_x = k^2 \Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}, \quad \mathfrak{E}_y = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y}$ $\mathfrak{H}_z = \frac{+ic}{\omega} k^2 \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad \mathfrak{E}_z = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial x}$	<p>im magnetischen Falle</p> $\mathfrak{E}_x = -\frac{i\omega}{c} \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad \mathfrak{E}_y = 0$ $\mathfrak{H}_x = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y}, \quad \mathfrak{H}_y = k^2 \Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}$ $\mathfrak{E}_z = \frac{+i\omega}{c} \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad \mathfrak{H}_z = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial x}$
--	---

Die Grenzbedingungen verlangen die Stetigkeit von  $\mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y, \mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_y$ ; das sind in beiden Fällen *drei* Bedingungen, während wir, wie in § 1 Gleichung (7) nur *zwei* Bedingungen zur Festlegung von  $\Pi$  gebrauchen können. Die drei Bedingungen sind unter sich direkt widerspruchsvoll, wie man aus der folgenden Zusammenstellung sieht. (Die Werte in Luft sind wieder durch den Index 0 hervorgehoben, die Grenzbedingungen können nach  $x$  und  $y$  integriert werden):

$k_0^2 \frac{\partial \Pi_0}{\partial x} = k^2 \frac{\partial \Pi}{\partial x} \text{ aus } \mathfrak{H}_y$ $\Pi_0 = \Pi \text{ aus } \mathfrak{E}_y$ <p>und daraufhin</p> $k_0^2 = k^2 \text{ aus } \mathfrak{E}_x$	$\frac{\partial \Pi_0}{\partial x} = \frac{\partial \Pi}{\partial x} \text{ aus } \mathfrak{E}_x$ $\Pi_0 = \Pi \text{ aus } \mathfrak{H}_x$ <p>und daraufhin</p> $k_0^2 = k^2 \text{ aus } \mathfrak{H}_y$
--	--

was gegen die Voraussetzung ist.

Wir müssen daher unseren Ansatz erweitern und annehmen, daß die horizontale Erregung  $\Pi_x$  bzw.  $\Pi_y$  mit einer vertikalen Erregung  $\Pi_z$  gekoppelt ist. Physikalisch bedeutet dies im elektrischen Falle, daß der Horizontalstrom in der Antenne seine Rückleitung durch Vertikalströme im Erdboden findet. Wir setzen also jetzt in die Gleichung (2) ein:

$$\Pi = (\Pi_x, \Pi_y) \quad | \quad \Pi = (\Pi_y, \Pi_z)$$

und erhalten nunmehr vier Bedingungen, also gerade so viel als zur Festlegung von je *zwei* Komponenten erforderlich sind. Wir berechnen nämlich aus (2)

$$\begin{array}{ll}
 \mathfrak{H}_x = \frac{-ic}{\omega} k^2 \frac{\partial \Pi_x}{\partial y} & \mathfrak{E}_x = \frac{i\omega}{c} \left( \frac{\partial \Pi_x}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_y}{\partial x} \right) \\
 \mathfrak{H}_y = \frac{-ic}{\omega} k^2 \left( \frac{\partial \Pi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_z}{\partial x} \right) & \mathfrak{E}_y = \frac{-i\omega}{c} \frac{\partial \Pi_x}{\partial x} \\
 (\mathfrak{E}_x = k^2 \Pi_x + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} \right)) & \mathfrak{H}_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Pi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} \right) \\
 \mathfrak{E}_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} \right) & \mathfrak{H}_y = k^2 \Pi_y + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Pi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} \right) \\
 \mathfrak{H}_z = \frac{ic}{\omega} k^2 \frac{\partial \Pi_x}{\partial y} & \mathfrak{E}_z = \frac{i\omega}{c} \frac{\partial \Pi_y}{\partial x} \\
 \mathfrak{E}_z = k^2 \Pi_z + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} \right) & \mathfrak{H}_z = k^2 \Pi_z + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Pi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} \right).
 \end{array}$$

Die Grenzbedingungen verlangen im elektrischen Falle

$$(17) \quad k_0^2 \Pi_{x0} = k^2 \Pi_x \dots \text{wegen } \mathfrak{H}_x$$

$$(18) \quad k_0^2 \frac{\partial \Pi_{x0}}{\partial x} = k^2 \frac{\partial \Pi_x}{\partial x} \dots \text{wegen } \mathfrak{H}_y \text{ und } (17)$$

$$(19) \quad \frac{\partial \Pi_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{z0}}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} \dots \text{wegen } \mathfrak{E}_y$$

$$(20) \quad k_0^2 \Pi_{x0} = k^2 \Pi_x \dots \text{wegen } \mathfrak{E}_x \text{ und } (19)$$

und im magnetischen Falle

$$(17') \quad \Pi_{x0} = \Pi_x \dots \text{wegen } \mathfrak{E}_y$$

$$(18') \quad \frac{\partial \Pi_{y0}}{\partial x} = \frac{\partial \Pi_y}{\partial x} \dots \text{wegen } \mathfrak{E}_x \text{ und } (17')$$

$$(19') \quad \frac{\partial \Pi_{y0}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{z0}}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} \dots \text{wegen } \mathfrak{H}_x$$

$$(20') \quad k_0^2 \Pi_{y0} = k^2 \Pi_y \dots \text{wegen } \mathfrak{H}_y \text{ und } (19').$$

Im elektrischen Fall lauten die Grenzbedingungen für  $\Pi_x$  analog wie bei der magnetischen Vertikalantenne, im magnetischen Falle diejenigen für  $\Pi_y$  ebenso wie bei der elektrischen Vertikalantenne. Machen wir daher für diese Komponenten dieselben Ansätze (3), (4), (5) wie in § 1, so finden wir ganz analoge Werte für  $f_0$ ,  $f_1$ ,  $\Pi_0$ ,  $\Pi$  wie in den Gleichungen (8), (9), aber mit Vertauschung des elektrischen und magnetischen Falles, nämlich

$$\begin{array}{ll}
 f_0 = \frac{-\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{N'} & f_0 = \frac{-k_0^2 \sqrt{\lambda^2 - k^2}}{N} \\
 f' = \frac{k_0^2 \sqrt{\lambda^2 - k^2}}{k^2 N'} & f' = \frac{+k_0^2 \sqrt{\lambda^2 - k^2}}{N} \\
 N' = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} + \sqrt{\lambda^2 - k^2} & N = k_0^2 \sqrt{\lambda^2 - k^2} + k^2 \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}
 \end{array}$$



$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_{x0} = \int_0^{\infty} \frac{J(\lambda r)}{N'} \\ \quad e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} z} \lambda d\lambda \\ \\ H_x = \frac{k_0^2}{k^2} \int_0^{\infty} \frac{J(\lambda r)}{N'} \\ \quad e^{+\sqrt{\lambda^2 - k^2} z} \lambda d\lambda \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_{y0} = \int_0^{\infty} \frac{k^2}{N} J(\lambda r) \\ \quad e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} z} \lambda d\lambda \\ \\ H_y = \int_0^{\infty} \frac{k_0^2}{N} J(\lambda r) \\ \quad e^{+\sqrt{\lambda^2 - k^2} z} \lambda d\lambda. \end{array} \right.$$

Da hiernach  $H_x$  und  $H_y$  nur von  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  abhängt, wird mit  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_x}{\partial x} = \frac{\partial H_x}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial H_x}{\partial r} \\ \frac{\partial H_y}{\partial y} = \frac{\partial H_y}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial H_y}{\partial r}. \end{array} \right.$$

Aus den Bedingungen (19) bzw. (19') folgt hiernach, daß  $H_x$  den Faktor  $\cos \varphi$  bzw.  $\sin \varphi$  enthalten muß oder genauer gesagt, daß  $H_x$  sich aus den Partikularlösungen der Wellengleichung

$$\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} J'(\lambda r) e^{\mp \sqrt{\lambda^2 - k^2} z} = - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} J_1(\lambda r) e^{\mp \sqrt{\lambda^2 - k^2} z}$$

aufbauen muß. Hier ist  $J_1 = -J'$  die Besselsche Funktion vom Index 1. Die allgemeineren Partikularlösungen

$$\frac{\cos n \varphi}{\sin n \varphi} J_n(\lambda r) e^{\mp \sqrt{\lambda^2 - k^2} z}$$

werden wir hier nicht nötig haben. Wir setzen also  $H_x$  für beide Fälle an in der Form

$$H_{0z} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \int_0^{\infty} f_0(\lambda) J'(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} z} \lambda d\lambda$$

$$H_z = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \int_0^{\infty} f(\lambda) J'(\lambda r) e^{+\sqrt{\lambda^2 - k^2} z} \lambda d\lambda.$$

Eine primäre Erregung ist hier nicht hinzuzufügen, da diese in der Horizontalkomponente  $H_x$  bzw.  $H_y$  enthalten ist. Die Gleichungen (17) und (19) bzw. (17') und (19') verlangen dann mit Rücksicht auf (21), (22):

$$\begin{array}{l|l}
 k_0^2 f_0 = k^2 f & f_0 = f \\
 \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} f_0 + \sqrt{\lambda^2 - k^2} f & \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} f_0 + \sqrt{\lambda^2 - k^2} f \\
 = \frac{\lambda}{N'} \left(1 - \frac{k_0^2}{k^2}\right) & = \frac{\lambda}{N'} (k^2 - k_0^2) \\
 f_0 = \frac{k^2}{k_0^2} f = (k^2 - k_0^2) \frac{\lambda}{N N'} & f_0 = f = (k^2 - k_0^2) \frac{\lambda}{N N'}
 \end{array}$$

und man erhält im elektrischen bzw. magnetischen Falle

$$(23) \quad \begin{cases} \Pi_{z0} = (k^2 - k_0^2) \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \int_0^\infty \frac{J'(\lambda r)}{N N'} e^{-V\lambda^2 - k_0^2 z} \lambda^2 d\lambda \\ \Pi_z = \begin{cases} (k^2 - k_0^2) \frac{k_0^2}{k^2} \cos \varphi \int_0^\infty \frac{J'(\lambda r)}{N' N} e^{+V\lambda^2 - k^2 z} \lambda^2 d\lambda \\ (k^2 - k_0^2) \sin \varphi \int_0^\infty \frac{J'(\lambda r)}{N N'} e^{+V\lambda^2 - k^2 z} \lambda^2 d\lambda. \end{cases} \end{cases}$$

Damit ist auch hier die allgemeine und strenge Lösung gewonnen.

Wir betrachten zunächst wieder zwei Sonderfälle.

a)  $k = k_0$ . Unsere Darstellungen für  $\Pi_z$  im elektrischen und für  $\Pi_y$  im magnetischen Falle gehen über in  $\frac{1}{2} \Pi_{\text{prim}}$ , wie in § 1a). Gleichzeitig wird  $\Pi_z$  in beiden Fällen = 0, als Hinweis darauf, daß die induzierte  $z$ -Komponente des Hertzschen Vektors ihren Ursprung nur der Grenzfläche beider Medien verdankt.

b)  $k = \infty$ . Hier wird im elektrischen Fall  $\Pi_{z0} = \Pi_z = 0$  und auch  $\Pi_{z0} = \Pi_z = 0$ , d. h. die primäre Erregung und die mit ihr gekoppelten vertikalen Erdströme werden durch die Wirkung der unmittelbar benachbarten, vollkommen leitenden Erde induktiv vernichtet.

Anders im magnetischen Falle. Hier bleibt  $\Pi_{y0}$  für  $k = \infty$  erhalten, während  $\Pi_{z0}$  und natürlich auch  $\Pi_y$ ,  $\Pi_z$  verschwinden. Wir verstehen dies so: Bei unserer magnetischen Antenne, deren Achse nach der  $y$ -Richtung weist, fließen elektrische Ströme im Rahmen nicht nur in der  $x$ -, sondern auch in der  $z$ -Richtung. Letztere entsprechen elektrischen Vertikalantennen, deren Feld durch den vollkommenen Leiter nicht vernichtet, sondern durch Spiegelung verstärkt wird.

Auch in den Ausdrücken dieses Paragraphen können wir von den einseitig bei  $\lambda = 0$  begrenzten Integralen übergehen zu beiderseits unbegrenzten Integralen von  $-\infty$  bis  $+\infty$ , wenn wir  $J$  bzw.  $J'$  ersetzen durch  $\frac{1}{2}H$  bzw.  $\frac{1}{2}H'$ , unter  $H$ ,  $H'$  die erste Hankelsche Funktion vom Index 0 und ihre Ableitung nach dem Argument verstanden. Dies ist nötig, bevor wir die Integrationswege deformieren können, was sogleich zu geschehen hat.

#### § 4. Diskussion: Oberflächenwellen, der Richteffekt und seine Erklärung durch vertikale Erdströme

Wie in § 2 gezeigt wurde, gibt der Nenner  $N'$  zu keinen Oberflächenwellen Anlaß, wohl aber der Nenner  $N$ , also auch der Nenner  $NN'$ . Infolgedessen breitet sich die Komponente  $\Pi_x$  im elektrischen Falle nicht in Oberflächenwellen aus, sie hat überhaupt keine erhebliche Reichweite, ganz ähnlich der magnetischen Vertikalantenne; was in die Ferne wirkt, ist der Bestandteil  $\Pi_z$ , der mit  $\Pi_x$  gekoppelt ist. Anders im magnetischen Falle. Hier liefert  $\Pi_y$  ebenso wie  $\Pi_z$  Oberflächenwellen. Der Grund hierfür ist aus dem am Ende des vorigen Paragraphen unter b) Gesagten ersichtlich.

Wir betrachten sodann den für beide Fälle charakteristischen *Richteffekt*, der im elektrischen Falle durch den Faktor  $\cos \varphi$  in (23) bedingt wird. Derselbe Faktor tritt (s. unten) bei den für die Ausstrahlung maßgebenden elektrischen und magnetischen Komponenten auf und geht auf diese Weise in die ausgestrahlte Energie und zwar quadratisch ein. Letztere wird für irgendeine Entfernung  $r$  als Funktion von  $\varphi$  durch das symmetrische Polardiagramm der Fig. 1 gegeben ( $\cos^2 \varphi$  als Radiusvektor aufgetragen; wegen der punktierten Kurve siehe unten). Dieses Diagramm gilt sowohl für den elektrischen wie für den magnetischen Fall (trotz verschiedenen Ursprungs des Faktors  $\cos^2 \varphi$  in beiden Fällen, vgl. § 5) und ist identisch mit der bekannten Ausstrahlungsfigur des Hertzschen Dipols, aber mit dem Unterschiede, daß jetzt das Maximum, z. B. im elektrischen Falle, in Richtung der Horizontalantenne, also scheinbar longitudinal liegt, während die longitudinale Ausstrahlung des Hertzschen Dipols bekanntlich Null ist. Der Grund ist natürlich der, daß es gar nicht die Horizontalantenne,

d. h. die Komponente  $\Pi_z$  ist, die auf die Ferne strahlt, sondern die induzierten Vertikalströme, d. h. die Komponente  $\Pi_z$ .

Kombiniert man die elektrische Horizontalantenne *kohärent* mit einer elektrischen Vertikalantenne, wie im geknickten Marconi-Sender, unterer Teil der Fig. 1, so addiert sich das  $\Pi_z$  der Vertikalantenne algebraisch zu dem  $\Pi_z$  der Horizontalantenne. Dadurch wird die Wirkung für  $\varphi = 0$  verstärkt, für  $\varphi = \pi$  geschwächt. Die punktierte Kurve im oberen Teil der Fig. 1 stellt den Sonderfall dar, wo beide  $\Pi_z$  numerisch gleich sind. Dann haben wir keine Ausstrahlung für  $\varphi = \pi$ , verdoppelte für  $\varphi = 0$ , also eine ausgesprochen einseitige Richtwirkung.

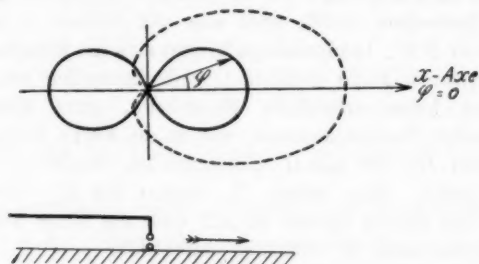


Fig. 1

Eine schräge Antenne kann man je nach ihrer Neigung auflösen in je einen Dipol von horizontaler und vertikaler Achse, deren Wirkungen sich einfach überlagern. Da bei größeren Entfernungen die Wirkung der horizontalen Anregung doch wieder auf die Wirkung einer Vertikalkomponente hinausläuft, wird die Superposition beider Bestandteile — bis auf die Richtwirkung — dem Felde einfacher Vertikalantennen entsprechen mit im wesentlichen senkrecht zum Erdboden gerichteten Kraftlinien.

Wir betrachten nun die quantitativen Verhältnisse etwas näher, und zwar zunächst für die *elektrische Horizontalantenne*. Wir verfahren wie in § 2, vernachlässigen also  $k_0^2$  und  $\lambda^2$  neben dem als groß vorausgesetzten  $|k|^2$  und ersetzen dementsprechend  $N$  durch Gleichung (11b). Die gleiche Vernachlässigung bei  $N'$  liefert  $N' = -ik$ . Die erste Gleichung (23) für den elektrischen Fall geht daher über in

$$\Pi_{x0} = i \frac{k^2 - k_0^2}{k^3} \cos \varphi \int_0^\infty \frac{J'(\lambda r)}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} - a} e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} z} \lambda^2 d\lambda.$$

Vergleichen wir dies mit dem entsprechend genäherten Ausdruck (12) für die elektrische Vertikalantenne, so sehen wir:

$$(24) \quad \Pi_{x0} = i \frac{k^2 - k_0^2}{k^3} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \Pi_0.$$

Setzen wir also für  $\Pi_0$  die Darstellung (16) ein, in der wir uns ( $\rho$  als hinreichend klein vorausgesetzt) auf das Hauptglied beschränken können, so folgt

$$(25) \quad \Pi_{x0} = C \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ik_0 R}}{R}.$$

Hier hat  $C$  bei konsequenter Vernachlässigung den Wert

$$(25a) \quad C = \frac{i}{k}.$$

Ebenso verfahren wir mit Gleichung (21) für  $\Pi_{x0}$ , setzen also auch hier  $N = -ik$  und finden

$$\Pi_{x0} = C \int_0^\infty J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} z} \lambda d\lambda.$$

Das Integral auf der rechten Seite ist nach Gleichung (3) identisch mit

$$-\frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ik_0 R}}{R},$$

also ergibt sich

$$(26) \quad \Pi_{x0} = -C \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ik_0 R}}{R}.$$

Der Vergleich von (25) und (26) zeigt, daß in der Tat, wie im Anfang dieses Paragraphen vorweggenommen wurde,

$$|\Pi_{x0}| \ll |\Pi_{z0}|.$$

Denn es ist näherungsweise

$$(27) \quad \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ik_0 R}}{R} = ik_0 \frac{r}{R} \frac{e^{ik_0 R}}{R}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ik_0 R}}{R} = ik_0 \frac{z}{R} \frac{e^{ik_0 R}}{R}$$

und für alle Punkte in der Nähe der Erdoberfläche  $z \ll r$ . Wir brauchen also für die Fernwirkung der elektrischen Horizontalantenne nur die induzierte Vertikalkomponente  $\Pi_z$  zu betrachten und können die ursprünglich angeregte Horizontalkomponente  $\Pi_x$  ganz vernachlässigen. Gleichzeitig haben wir

damit den analytischen Nachweis von der schlechten Wirkungsweise der magnetischen Vertikalantenne nachgetragen, da ja deren  $\Pi_0$  nach (9) durch dieselbe Formel (21) dargestellt wird wie unser  $\Pi_{z0}$  und daher ebenfalls durch (26) angenähert wird.

Der Zusammenhang (24) zwischen Horizontal- und Vertikalantenne ist sehr lehrreich. Er zeigt, daß die Fernwirkung  $\Pi_{z0}$  der Horizontalantenne aufgefaßt werden kann als das *Zusammenwirken zweier Vertikalantennen* im Sinne der Fig. 2. Die hier

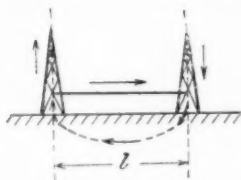


Fig. 2

gezeichnete Doppelantenne, bestehend aus den Vertikalströmen vom und zum Erdboden, wirkt nach außen in der Richtung der Horizontalantenne nach der Formel

$$l \frac{\partial \Pi_0}{\partial r},$$

wo  $l$  der effektive Hebelarm der beiden Vertikalströme und  $\Pi_0$  die Wirkung der einzelnen Vertikalantenne, also im

wesentlichen  $e^{ikR}/R$  ist. Für die Ausstrahlung unter dem Winkel  $\varphi$  gegen die Horizontalantenne ist  $l$  ersichtlich zu ersetzen durch  $l \cos \varphi$ , nämlich durch die Komponente des Hebelarms  $l$  in der Richtung  $\varphi$ . Dadurch erklärt sich die *Richtwirkung* der Horizontalantenne, insbesondere die Ausstrahlung 0 für  $\varphi = \pi/2$ , in ganz ähnlicher Weise wie bei älteren Versuchen von F. Braun mit der Doppelantenne. Die Konstante  $C$  in Gleichung (25) gewinnt so die Bedeutung des effektiven Hebelarmes. Gleichung (25a) zeigt daraufhin, daß dieser Hebelarm gleich 0 wird für  $k = \infty$ . Die *endliche Leitfähigkeit am Standorte der Horizontalantenne* ist eine notwendige Vorbedingung für die Fernwirkung der Horizontalantenne (vgl. Hörschelmann a. a. O.).

Wir machen dieselbe Näherung im Falle der *magnetischen Horizontalantenne*. Nach (23) gilt hier für  $\Pi_{z0}$  dieselbe Darstellung wie vorher, nur mit  $\sin \varphi$  statt  $\cos \varphi$ , also in erster Näherung (vgl. (25), (25a) und (27)):

$$(28) \quad \Pi_{z0} = C \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ik_0 R}}{R} = - \frac{k_0}{k} \sin \varphi \frac{r}{R} \frac{e^{ik_0 R}}{R}.$$

Andererseits ist  $\Pi_{y0}$  nach (21) durch dieselbe Formel gegeben wie  $\Pi$  bei der elektrischen Vertikalantenne, also in erster Näherung nach (16)

$$(29) \quad \Pi_{y0} = \frac{e^{ik_0 R}}{R}.$$

Hier zeigt sich nun, umgekehrt wie im elektrischen Falle:

$$|\Pi_{x0}| \ll |\Pi_{y0}|, \text{ sofern } h_0 \ll |k|.$$

Daraus folgt für den Richteffekt im magnetischen Falle, daß dieser gar nicht durch den Faktor  $\sin \varphi$  bei  $\Pi_z$  hervorgerufen wird — wir können ja in erster Näherung  $\Pi_z$  gegen  $\Pi_y$  vernachlässigen — sondern durch den Zusammenhang zwischen dem Felde ( $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$ ) und dem Hertzschen Vektor  $\Pi_y$ . Ferner zeigt Gleichung (29), daß der Vorgang bei der magnetischen Horizontalantenne unempfindlich ist gegen die Bodenbeschaffenheit und keineswegs, wie bei der elektrischen Horizontalantenne, mit  $h = \infty$  unterdrückt wird. Der Grund hierfür wurde bereits am Ende des vorigen Paragraphen angedeutet.

#### § 5. Das Feld der elektrischen und magnetischen Horizontalantenne

Wir führen die Feldberechnung zunächst allgemein aus, d. h. ohne Rücksicht auf das Größenverhältnis zwischen  $\Pi_x$  bzw.  $\Pi_y$  und  $\Pi_z$  und zerlegen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  in Komponenten nach  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ . Dabei beachten wir die wohlbekannten Beziehungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \sin \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \mathfrak{E}_r &= \cos \varphi \mathfrak{E}_x + \sin \varphi \mathfrak{E}_y, \\ \mathfrak{E}_\varphi &= -\sin \varphi \mathfrak{E}_x + \cos \varphi \mathfrak{E}_y \text{ usw.} \end{aligned}$$

Wir führen die folgenden nur von  $r$  und  $z$  abhängigen Abkürzungen ein

im elektrischen Falle

$$\begin{aligned} X &= \Pi_x, Z = \frac{1}{\cos \varphi} \Pi_z, \\ U &= \frac{\partial X}{\partial r} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \\ &\frac{1}{\cos \varphi} \left( \frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

im magnetischen Falle

$$\begin{aligned} Y &= \Pi_y, Z = \frac{1}{\sin \varphi} \Pi_z, \\ U &= \frac{\partial Y}{\partial r} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \\ &\frac{1}{\sin \varphi} \left( \frac{\partial \Pi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Aus diesen Größen berechnet sich  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$  in exakter Form durch die folgenden Gleichungen, welche als Umformung der Felddarstellung aus § 3 anzusehen sind und die Richtungsabhängigkeit der einzelnen Komponenten erkennen lassen:

$$\begin{array}{ll}
 \mathfrak{E}_r = \left( k^2 X + \frac{\partial U}{\partial r} \right) \cos \varphi & \mathfrak{H}_r = \left( k^2 Y + \frac{\partial U}{\partial r} \right) \sin \varphi \\
 \mathfrak{E}_\varphi = - \left( k^2 X + \frac{U}{r} \right) \sin \varphi & \mathfrak{H}_\varphi = \left( k^2 Y + \frac{U}{r} \right) \cos \varphi \\
 \mathfrak{E}_z = \left( k^2 Z + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \cos \varphi & \mathfrak{H}_z = \left( k^2 Z + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \sin \varphi \\
 \mathfrak{H}_r = \frac{i c}{\omega} k^2 \left( \frac{Z}{r} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) \sin \varphi & \mathfrak{E}_r = \frac{i \omega}{c} \left( \frac{Z}{r} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \sin \varphi \\
 \mathfrak{H}_\varphi = \frac{i c}{\omega} k^2 \left( \frac{\partial Z}{\partial r} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) \cos \varphi & \mathfrak{E}_\varphi = - \frac{i \omega}{c} \left( \frac{\partial Z}{\partial r} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \sin \varphi \\
 \mathfrak{H}_z = \frac{i c}{\omega} k^2 \frac{\partial X}{\partial r} \sin \varphi & \mathfrak{E}_z = \frac{i \omega}{c} \frac{\partial Y}{\partial r} \cos \varphi .
 \end{array}$$

Nun ist nach den Näherungsformeln (25), (26) bzw. (28), (29) in erster Näherung:

$$\begin{array}{ll}
 X \cong 0, \quad U \cong 0 & \frac{U}{r} \ll \frac{\partial U}{\partial r} = -k^2 Y \\
 \frac{Z}{r} \ll \frac{\partial Z}{\partial r}, \quad \text{daher} & Z \cong 0 \quad \frac{\partial U}{\partial z} \cong 0, \quad \text{daher} \\
 \mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_\varphi = \mathfrak{H}_r = \mathfrak{H}_z = 0 & \mathfrak{H}_r = \mathfrak{H}_z = \mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_\varphi = 0 \\
 \text{und mit} & \text{und mit} \\
 \frac{r}{R} \cong 1, \quad D = i k_0^3 C = -k_0^2 \frac{k_0}{k} & \frac{r}{R} \cong 1, \quad D = -k_0^2 \\
 (30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_z = D \frac{e^{i k_0 R}}{R} \cos \varphi \\ \mathfrak{H}_\varphi = -D \frac{e^{i k_0 R}}{R} \cos \varphi \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{H}_\varphi = -D \frac{e^{i k_0 R}}{R} \cos \varphi \\ \mathfrak{E}_z = D \frac{e^{i k_0 R}}{R} \cos \varphi . \end{array} \right.
 \end{array}$$

Der Energiefluß, der dem Produkte aus  $\mathfrak{E}_z$  und  $\mathfrak{H}_\varphi$  proportional ist, hat also in beiden Fällen den Faktor  $\cos^2 \varphi$ , wie in Fig. 1 dargestellt. Sein Maximum liegt auch im magnetischen Falle, (wenn der magnetische Dipol nach der  $y$ -Achse gerichtet ist), in der  $x$ -Achse, wie leicht verständlich.

Wir haben noch ein Wort hinzuzufügen über das Größenverhältnis der Ausstrahlung im elektrischen und magnetischen Falle. Dazu ist es natürlich nötig, die vorstehenden Amplitudenwerte  $D$  zu multiplizieren mit dem Faktor des elektrischen bzw. magnetischen Momentes der primären Erregung, der in allen bisherigen Formeln gleich 1 gesetzt wurde. Dieser Faktor ist

elektrisch  
 $J l \lambda$

magnetisch  
 $J F N$



nämlich magnetisch gleich Strom  $J$  mal umströmter Fläche  $F$  mal Windungszahl  $N$ , elektrisch zunächst gleich der Größe der getrennten Ladungen  $\pm E$  mal Hebelarm  $l$ , welchen letzteren wir gleich der Antennenlänge setzen können. Die Ladung  $E$  ist zu berechnen als Zeitintegral des Stromes über eine Periode, also angenähert durch  $J_{\text{el}} \cdot \tau$ . Hier ist  $J_{\text{el}} = cJ$  und  $\tau = \lambda/c$ , womit die obige Aussage bewiesen ist.

Nach dem bei (30) Bemerkten unterscheidet sich die Amplitude  $D$  im elektrischen Falle von derjenigen im magnetischen durch den Faktor  $k_0/k$ . Mit Rücksicht auf die Momente der primären Erregung verhält sich daher die Ausstrahlung  $S$  der elektrischen zur magnetischen Horizontalantenne bei gleicher Stromstärke in beiden wie

$$(31) \quad \frac{S_{\text{el}}}{S_{\text{magn}}} = \left( \frac{k_0}{|k|} \frac{l\lambda}{FN} \right)^2.$$

Andrerseits vergleichen wir die elektrische Horizontalantenne mit einer elektrischen Vertikalantenne von gleicher Länge und Stromstärke. Bei letzterer wird die Feldstärke in Luft  $\mathcal{E}_z \cong k_0^2 H_0 \cong k_0^2 e^{ik_0 R}/R$  wegen (16). Der Vergleich mit (30) zeigt dann:

$$(32) \quad \frac{S_{\text{hor}}}{S_{\text{vert}}} = \left( \frac{k_0}{|k|} \right)^2.$$

Die elektrische Horizontalantenne wirkt also nach (32) wesentlich schlechter als die Vertikalantenne, da sicher  $|k| \gg k_0$  ist. Ob sie auch schlechter als die Rahmenantenne wirkt, hängt von dem Quotienten auf der rechten Seite von (31) ab. Es sind Verhältnisse denkbar, wo dieser Quotient kleiner als 1 wird, wo also die Rahmenantenne stärker strahlt als selbst eine lange Horizontalantenne.

Das Verhältnis Rahmenantenne zu elektrischer Vertikalantenne schließlich stellt sich nach (31) und (32) so:

$$\frac{S_{\text{magn}}}{S_{\text{el}}} = \left( \frac{FN}{l\lambda} \right)^2.$$

Auch hier ist die Unterlegenheit der Rahmenantenne (bei gleichem Strom!) nicht unbedingt ausgemacht. Nur die Beschränkung auf dünnen Draht und relativ kleinen Strom setzt die Rahmenantenne in Nachteil.

(Eingegangen 10. Oktober 1926)

**16. Einige Bemerkungen zur Magnetisierung  
bei tiefer Temperatur;  
von P. Debye**

Es ist eine bekannte Tatsache, daß die Langevinsche Formel imstande ist die paramagnetische Sättigung wiederzugeben, wie das von Kamerling-Onnes am Falle des Gadoliniumsulfats experimentell gezeigt wurde. Daß dieses möglich ist, obwohl die Voraussetzungen, die Langevin bei seiner Ableitung der Formel gemacht hat, nicht im mindesten zutreffen, gibt Anlaß zu einem reizvollen Problem, das erst eine teilweise Bearbeitung erfahren hat. Es soll im folgenden einerseits gezeigt werden, daß die Langevinsche Formel, trotz ihrer experimentellen Bestätigung nicht genau richtig sein kann, da sie zu Folgerungen Anlaß gibt, die mit dem Nernstschen Wärmesatz in Widerspruch stehen. Andererseits soll aus derselben Formel ein quantitativer Schluß auf die Temperaturänderung bei einem adiabatischen magnetischen Prozeß versucht werden. Dieselbe scheint sich als relativ beträchtlich zu ergeben und veranlaßt deshalb die Frage, ob man nicht versuchen sollte, sich dem absoluten Nullpunkt mit Hilfe eines solchen Prozesses zu nähern.

1. Es sei 1 g einer magnetisierbaren Substanz betrachtet, von dessen Volumänderungen abgesehen werden kann und dessen Gesamtenergie gleich  $u$  sei. Führt man diesem Körper die Wärmemenge  $\delta q$  zu und ändert sein magnetisches Moment  $\sigma$  um  $d\sigma$  durch eine Änderung des magnetischen Feldes  $H$ , so ist die Arbeit gleich  $Hd\sigma$  und es gilt<sup>1)</sup>

$$(1) \quad du = \delta q + Hd\sigma = Tds + Hd\sigma,$$

1) An Stelle einzelner Literaturnachweise darf wohl auf meinen Artikel „Theorie der elektrischen und magnetischen Molekulareigenschaften“ im Handbuch der Radiologie, Bd. 6, Leipzig 1925 und auf das kürzlich erschienene schöne Buch von E. C. Stoner, „Magnetism and atomic structure“, London 1926, verwiesen werden.

wenn  $T$  die Temperatur und  $s$  die Entropie des betrachteten Körpers bedeuten.

Betrachtet man  $\sigma$  und  $T$  als unabhängige Variablen und schreibt die Bedingung dafür auf, daß  $ds$  ein totales Differential ist, so folgt in bekannter Weise

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial \sigma} = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{H}{T} \right),$$

eine Formel, die vollkommen analog ist zu der bekannten Beziehung

$$\frac{\partial u}{\partial v} = T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{p}{T} \right),$$

welche kalorische und thermische Zustandsgleichung eines Gases koppelt.

Betrachten wir nun speziell die Versuche mit Gadoliniumsulfat, so kann als experimentell sichergestellt angesehen werden, daß jeweilig  $\sigma$  nur eine Funktion vom Verhältnis  $H/T$  war, da sich die mit verschiedenen Feldern und bei verschiedenen Temperaturen experimentell erreichten Werte der Magnetisierung alle längs einer Kurve ordnen, wenn sie als Funktion von jenem Verhältnis aufgetragen werden. Ist dem aber so, so ist umgekehrt  $H/T$  nur Funktion von  $\sigma$  allein und es muß nach (2)

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = 0$$

sein, so daß  $u$  nur von  $T$  abhängt.

Unter dieser Voraussetzung folgt aus (1)

$$(3) \quad ds = \frac{1}{T} \frac{du}{dT} dT - \frac{H}{T} d\sigma$$

oder

$$(3') \quad s = s_1 + s_2,$$

mit einem kalorischen Anteil

$$(4) \quad s_1 = \int \frac{1}{T} \frac{du}{dT} dT$$

und einem magnetischen Anteil

$$(4') \quad s_2 = - \int \frac{H}{T} d\sigma.$$

Setzt man abkürzend  $\frac{H}{T} = x$  und  $\sigma = f(x)$ , so wird

$$(5) \quad s_2 = - \int x f'(x) dx = - x f(x) + \int f(x) dx,$$

während  $s_1$  die gewöhnliche Entropie im Felde 0 bedeutet.

Bis hierher wurde noch kein Gebrauch von der besonderen Form der Magnetisierungsfunktion gemacht. Führen wir nun, die ja ebenfalls im Gebiete der experimentellen Bedingungen von Kamerling-Onnes bestätigte, Langevinsche Funktion dafür ein, so haben wir zu setzen

$$(6) \quad \sigma = n \mu \left[ \coth \frac{\mu H}{k T} - \frac{1}{\mu H / k T} \right],$$

wenn  $n$  Teilchen im Gramm mit dem magnetischen Moment  $\mu$  vorhanden sind und  $k$  die Boltzmannsche Konstante bedeutet.

Setzt man abkürzend  $\frac{\mu H}{k T} = \xi$  und benennt die Klammerfunktion in (6) mit  $L(\xi)$ , so wird nach (5)

$$(5') \quad s_2 = - n k \int \xi L'(\xi) d\xi = n k \left[ \log \frac{\sinh \xi}{\xi} + 1 - \xi \coth \xi \right].$$

Frägt man jetzt, ob dieser Ausdruck für  $s_2$  mit dem Nernst'schen Wärmesatz verträglich ist, so hat man (5') für kleine Werte von  $T$ , d. h. also für große Werte von  $\xi$  zu entwickeln. Man findet

$$(5'') \quad s_2 = - n k [\log 2\xi - 1 + (2\xi + 1)e^{-2\xi} + \dots].$$

Bei der Annäherung an den absoluten Nullpunkt ( $\xi = \infty$ ) wird demnach der magnetische Anteil der Entropie logarithmisch unendlich. Benutzt man nur die Teilaussage des Nernst'schen Satzes, daß die Entropie für alle endlichen Temperaturen einen endlichen Wert haben soll, so ist (5'') und damit die Langevinsche Formel für die Magnetisierungsfunktion demnach abzulehnen.

Überlegt man, was der innere Grund für den Widerspruch ist, so sieht man ohne Mühe, daß er darin zu suchen ist, daß die Langevinsche Funktion eine Magnetisierung darstellt, welche mit steigender Feldstärke zu langsam ihrem Sättigungswert zustrebt. In der Tat ist für große Werte von  $\xi$

$$(7) \quad L(\xi) = 1 - \frac{1}{\xi} + \dots;$$

unter dem Integral in (5') steht also in erster Näherung  $d\xi/\xi$  und das logarithmische Verhalten stellt sich ein. Offenbar wird jede Magnetisierungsfunktion, welche eine ähnliche Entwicklung wie  $L$  zuläßt, deren Abweichungen vom Sättigungswert also in erster Näherung durch  $1/\xi$  gemessen werden können, dieselbe Schwierigkeit veranlassen.

Mit Hilfe der Weißschen Hypothese des inneren Feldes kann bekanntlich die Magnetisierungsfunktion des paramagnetischen Falles auch herangezogen werden, um die Sättigungsmagnetisierung der ferromagnetischen Körper in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur darzustellen. Der Verlauf dieser Kurve für tiefe Temperaturen wird ebenfalls wesentlich bestimmt durch die Form der Entwicklung der paramagnetischen Magnetisierungsfunktion für große Werte ihres Argumentes. Hat diese Entwicklung eine (7) ähnliche Form, so heißt das, daß die Sättigungsmagnetisierung nur relativ langsam ihren Maximalwert für  $T=0$  erreicht. Es ist nun von besonderem Interesse, daß die experimentellen Kurven sich für tiefe Temperaturen viel inniger der Horizontalen anschmiegen, welche die maximale Sättigung darstellt, als das mit der Langevinschen Funktion verträglich ist. Es ist also sogar ein experimenteller Hinweis dafür vorhanden, daß die Magnetisierungsfunktion keine Entwicklung der Form (7) zulassen sollte, wodurch das Resultat, welches wir aus der Forderung einer endlichen Magnetisierungsentropie ableiteten, eine Bestätigung erfährt.

Prüft man schließlich die Funktionen, welche auf die Existenz einer endlichen Anzahl diskreter Orientierungen im Sinne der Quantentheorie aufgebaut sind, so findet man, daß hier keine Schwierigkeit mehr vorhanden ist. So hat z. B. die Lenzsche Funktion

$$\frac{\sigma}{n\mu} = \mathfrak{I}g\xi$$

einerseits die Entwicklung

$$\mathfrak{I}g\xi = 1 - 2e^{-\xi} - \dots$$

Andererseits liefert sie für den magnetischen Anteil der Entropie

$$\begin{aligned} s_2 &= -n k [\xi \mathfrak{I}g\xi - \log(\mathfrak{Cof}\xi)] \\ &= -n k [\log 2 - (2\xi + 1)e^{-2\xi} + \dots], \end{aligned}$$

so daß gegen die Forderung der Endlichkeit für  $T = 0$  nicht verstoßen wird. Zusammenfassend ist es also als überaus wahrscheinlich anzusehen, daß die Langevinsche Funktion, trotz ihrer Brauchbarkeit als Interpolationsformel, nicht als die richtige Magnetisierungsfunktion angesehen werden darf.

2. Es gibt indessen, wie die Beobachtungen an Gadoliniumsulfat gezeigt haben, einen Bereich, in dem die Langevinsche Funktion sich etwa im Sinne einer Interpolationsformel gut bewährt. Innerhalb dieses Bereiches wird man demnach zutreffende Schlüsse auf ihr aufbauen können. Denken wir uns z. B. einen adiabatischen Prozeß ausgeführt, bei dem das Magnetfeld etwa plötzlich erzeugt oder entfernt wird, so ist dieser durch die Forderung charakterisiert, daß die Entropie konstant bleibt. Nach (4) und (5) heißt das

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} s_1 + s_2 &= \int \frac{1}{T} \frac{du}{dT} dT \\ &+ nk \left[ \log \frac{\text{Ctg} \xi}{\xi} + 1 - \xi \text{Cotg} \xi \right] = \text{const.} \end{aligned} \right.$$

Betrachten wir jetzt die Größenordnung der beiden Anteile in einem experimentell realisierbaren Fall.

Bei  $1,3^\circ$  absolut und in einem Felde von 22000 Gauss hat Kamerling-Onnes etwa 84 Proz. des Sättigungswertes erreicht. Dem entspricht nach der Langevinschen Formel ein Wert von  $\xi$ , welcher dem Ansatz

$$\text{Cotg} \xi - \frac{1}{\xi} = 0,84$$

genügt und sich zu rund  $\xi = 6$  ergibt. Durchläuft  $\xi$  die Werte von 0 bis 6, so überstreicht die eckige Klammer in (8) den Wertbereich 0 bis  $-1,48$ . Soll der Prozeß adiabatisch verlaufen, so muß (8) erfüllt sein, d. h. der durch das erste Glied gemessene kalorische Anteil der Entropie muß gleichzeitig um  $1,48 nk$  zunehmen. Was das für die adiabatisch hervorgerufene Temperaturänderung bedeutet, kann leider nicht genau berechnet werden, da keine Daten für die spezifische Wärme des Gadoliniumsulfats bekannt sind. Als Schätzung kann man vielleicht das Folgende gelten lassen. Sind in 1 g des Salzes  $N$  Atome enthalten und behandelt man den Körper für die tiefen, allein in Betracht kommenden Temperaturen, wie man das mit

einem einatomigen Körper tun darf, so liefert die Quantentheorie der spezifischen Wärme für  $s_1$  den Wert

$$s_1 = \frac{4\pi^4}{5} N k \left( \frac{T}{\Theta} \right)^3,$$

wobei  $\Theta$  die charakteristische Temperatur des Gadoliniumsulfats bedeutet.  $N$  hat hier die Bedeutung: Gesamtzahl der Atome,  $n$  hatte oben die Bedeutung: Anzahl unabhängige Elementarmagnete. Nehmen wir nun an, daß nur die Gadoliniumatome mit einem elementaren paramagnetischen Momente versehen sind, so verhält sich  $N$  zu  $n$ , wie die Anzahl Atome beliebiger Art im Molekül zu der Anzahl Gadoliniumatome im Molekül. Da das Molekül die Zusammensetzung  $\text{Gd}_2(\text{SO}_4)_3 + 8\text{H}_2\text{O}$  hat, wird  $\frac{N}{n} = \frac{41}{2}$ . Wir können also auch schreiben

$$s_1 = \frac{4\pi^4}{5} \frac{41}{2} \left( \frac{T}{\Theta} \right)^3 n k = 1600 \left( \frac{T}{\Theta} \right)^3 n k.$$

Nimmt man nun für  $\Theta$  einen sehr niedrigen Wert, z. B.  $\Theta = 50$  an und berechnet  $s_1$  für  $T = 2$ , so erhält man

$$s_1 = 0,10 n k.$$

Oben hatten wir angenommen, daß  $\xi$  von 0 bis 6 ging, durch Anlegen eines Feldes. Wir können ebenso gut daran denken, daß während einer adiabatischen Entfernung des Feldes  $\xi$  von 6 auf 0 fällt. In diesem Falle nimmt der magnetische Anteil der Entropie um  $1,48 n k$  zu und es sollte der kalorische Anteil diese Zunahme kompensieren, indem er um den gleichen Betrag abnimmt. Unsere Schätzung, die  $s_1 = 0,10 n k$  ergab, zeigt indessen, daß unter den vorausgesetzten Umständen selbst die Abkühlung auf den absoluten Nullpunkt nicht ausreichen würde.

Natürlich hat diese Feststellung nicht die Bedeutung, daß Aussicht bestehe, mit Hilfe eines adiabatischen magnetischen Prozesses den absoluten Nullpunkt zu erreichen. Man muß vielmehr schließen, daß die Langevinsche Formel für die Magnetisierung versagen wird. Aber die Feststellung, daß sie einerseits bei  $1,3^\circ$  absolut experimentell noch bestätigt wird und die großen Differenzen andererseits, welche oben zwischen den möglichen magnetischen und kalorischen Entropieänderungen

errechnet wurden, machen es sehr wahrscheinlich, daß man mit Hilfe eines solchen Prozesses ein gutes Stück über den Geltungsbereich der Formel hinaus wird vordringen können. Es dürfte daher interessant sein, bei tiefer Temperatur Messungen anzustellen über die adiabatische Abkühlung von Gadoliniumsulfat, welche man bei plötzlicher Entfernung des Magnetfeldes scheint erwarten zu dürfen.<sup>1)</sup> Eine Voraussage über die Größe der erreichbaren Abkühlung darf man wohl nicht wagen, aber es scheint nicht ausgeschlossen, daß dieselbe erheblich sein könnte. Das Experiment allein kann indessen Aufschluß geben, die obigen Überlegungen sollen zur Ausführung desselben anregen.

1) Man kann außerdem bemerken, daß die in einem konstanten Magnetfelde gemessene spezifische Wärme  $c_H$  voraussichtlich merkbar von der spezifischen Wärme  $c_0$  im Felde 0 abweichen wird, denn nach (8) folgt durch Differentiation ohne weiteres

$$c_H - c_0 = nk \left[ 1 - \frac{\xi^2}{\sin^2 \xi} \right],$$

was schon für  $\xi = 1$  gleich  $0,15 nk$  wird.

(Eingegangen 30. Oktober 1926)



## 17. *Über Alkalihalogenidphosphore;* *von R. Pohl und E. Rupp*

§ 1. P. Pringsheim behandelt im Handbuch der Physik<sup>1)</sup> bei der Darstellung der Phosphoreszenz ausführlich die „Steinsalzphosphore“.<sup>2)</sup> Fast ausschließlich an ihnen erläutert er den engen Zusammenhang der Kristallphosphoreszenz mit der lichtelektrischen Leitung. Pringsheim betont mit Recht, daß die großen, optisch einwandfreien Steinsalzkristalle die charakteristischen Erscheinungen quantitativ besser beobachten lassen, als das zum Teil schlecht definierte mikrokristalline Pulver der typischen Sulfidphosphore, an denen der enge Zusammenhang der lichtelektrischen Leitung mit der Phosphoreszenzerregung und -emission zuerst aufgefunden wurde.<sup>3)</sup>

Der Nachteil dieser bisher bekannten „Steinsalzphosphore“ ist ihr außerordentlich schlechter optischer Nutzeffekt. Die zur Erregung führende Lichtabsorption und die elektrischen Vorgänge lassen sich gut beobachten. Die Lichtemission hingegen ist überaus dürftig. Sie ist schlecht zu untersuchen und betrifft vielleicht nur einen Sonderfall von geringerer Bedeutung.

Zweck dieser Mitteilung ist der Hinweis, daß sich auch „Steinsalzphosphore“ oder allgemeiner „Alkalihalogenidphosphore“ herstellen lassen, die alle optischen und elektrischen Vorzüge großer klarer einheitlicher Kristalle mit einem guten optischen Nutzeffekt, mit hell leuchtender Phosphoreszenzemission vereinigen. Wir stützen uns dabei auf eine Reihe von Untersuchungen, die zum Teil noch gemeinsam mit B. Gudden im hiesigen Institut begonnen worden sind.

1) Verlag Springer 1926.

2) B. Gudden u. R. Pohl, Zeitschr. f. Phys. 31. S. 651. 1925.

3) B. Gudden u. R. Pohl, a. a. O. 3. S. 98. § 4. 1920; 4. S. 206.

§ 5. 1921; 21. S. 1. 1924.

§ 2. Wir haben zur Zeit bei den Alkalihalogeniden vier verschiedene Lichtabsorptionsvorgänge zu unterscheiden. Man beschreibt sie am einfachsten an einem Beispiel, etwa an NaCl.

1. *Die Eigenabsorption des Gitters.* Reines NaCl ist bis herab zu  $186\text{ m}\mu$  praktisch völlig durchlässig. Der Absorptionskoeffizient übersteigt nach Messungen von Hrn. Hilsch nirgends den Wert  $\alpha = 0,005\text{ mm}^{-1}$ , man vergleiche Fig. 1. Die Eigenabsorption beginnt für reines NaCl erst im Schumannspektralgebiet. Nach Analogie anderer Alkalihalogenide handelt es sich dort um eine mit sinkender Wellenlänge zunächst flach ansteigende Kurve.

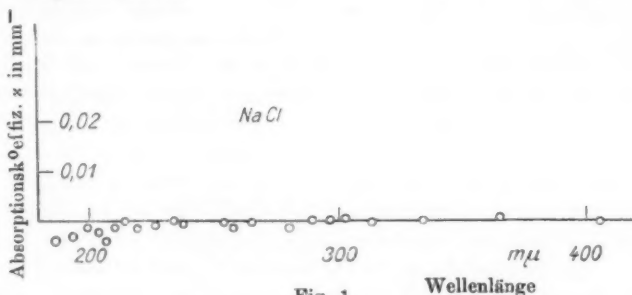


Fig. 1

2. *Eine Fremdfärbung erster Art.* Bei NaCl-Kristallen ist es eine sehr charakteristische Gelb- oder Braunfärbung. Sie läßt sich in gleicher Weise erzeugen durch große Lichtquanten, durch schnelle Elektronen und durch Erhitzung der Kristalle in Na-Dampf.<sup>1)</sup> — Diese Fremdfärbung erster Art entsteht durch Amikronen mit einem sehr einfachen Absorptionsspektrum.<sup>2)</sup> Es ist besonders ausführlich durch Gyulai<sup>3)</sup> unter-

1) Ein besonders einfaches Verfahren beschreibt Z. Gyulai, Zeitschr. f. Phys. 37. 889. 1926.

2) Die Annahme, daß es sich um die Absorptionsserie des neutralen Natriumatoms handelt, die durch Nachbarmoleküle im Gitter stark verbreitert und verschoben ist (B. Gudden u. R. Pohl, Zeitschr. f. Phys. 34. 249. 1925), gewinnt an Wahrscheinlichkeit. Hr. Ottmer hat für etliche K- und Na-Halogenide im Ultraroten ein zweites, lichtelektrisch unwirksames Absorptionsmaximum feststellen können, daß man nach seinem eingehend untersuchten Verhalten als die Resonanzlinie des betreffenden Alkaliatoms ansprechen möchte.

3) Z. Gyulai, Zeitschr. f. Phys. 31. S. 296. 1925; 33. 251. 1926.

sucht worden und wird als Kurve I in Fig. 2 schematisch dargestellt.

3. *Eine Fremdfärbung zweiter Art.* Sie entsteht durch fremde Atome, die dem Schmelzfluß in geringer Konzentration beigelegt werden. Es handelt sich um ein im Ultraviolett gelegenes Bandenspektrum, wie es in Fig. 2 als Kurve II schematisiert ist. Die Fig. 3 gibt statt des Schemas eine Meßreihe, die Hr. Hilsch an RbCl-Kristallen gewonnen hat. Man sieht einzelne, scharf ausgeprägte Maxima. Sie rühren in diesem Falle von einem nicht beabsichtigten Metallzusatz her. Man deutet diese Banden wohl am ungezwungensten als das

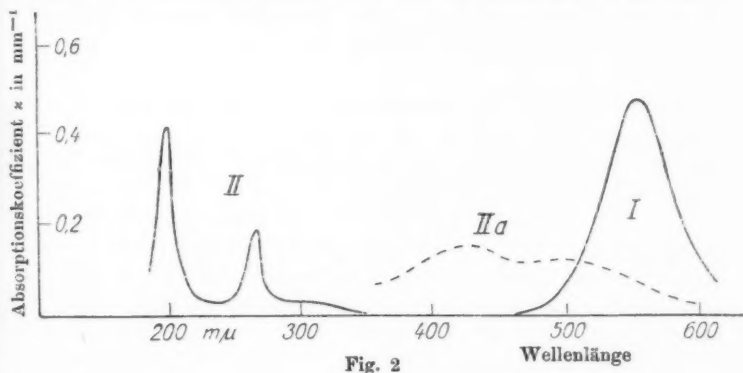


Fig. 2

Absorptionsspektrum einer im Gitter gelösten Fremdmethylhalogenverbindung.

4. *Eine Fremdfärbung durch Ultramikronen.* Beim NaCl ist sie meist blau, hat aber je nach Teilchengröße oft auch ganz andere Farbtöne, vor allem bei der Elektrolyse heißer NaCl-Kristalle. Es handelt sich nach allgemeiner Auffassung um kolloidal verteilte Na-Teilchen. Man erzeugt sie durch Hineindiffundieren größerer Mengen von Na-Dampf und durch verschiedene andere Vorgänge. Diese Na-Teilchen sind bereits so groß, daß sie die Erscheinung des Oberflächenphotoeffektes, des normalen sowohl wie des selektiven, zeigen.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Z. Gyulai, Zeitschr. f. Phys. 35. S. 411. 1925; R. Hilsch, a. a. O. 39. S. 644. 1926.

§ 3. Den großen Unterschieden im Vorgang der Lichtabsorption entsprechen noch größere Unterschiede in der Ausbildung der Phosphoreszenzerscheinungen:

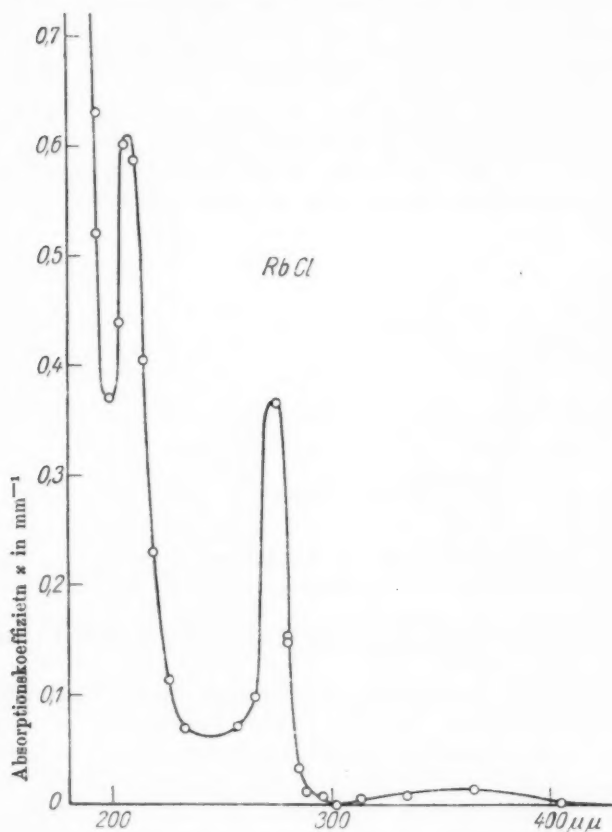


Fig. 3

1. Alkalihalogenidkristalle ohne Fremdabsorption zeigen keine Phosphoreszenz. Ein NaCl-Kristall mit dem in Fig. 1 skizzierten Absorptionsspektrum läßt sich durch Wellenlängen  $\leq 186 \text{ m}\mu$  nicht zur Phosphoreszenz erregen.

2. Alkalihalogenidkristalle mit *Fremdfärbung erster Art* bilden ausgesprochene Phosphore. Zu ihnen gehören die in § 1 genannten Steinsalzphosphore. Sie zeigen, wie erwähnt, in Absorption und lichtelektrischer Leitung das Verhalten der Kristallphosphore in geradezu typischer Weise. Ihr Nachteil ist ihr ganz schlechter optischer Nutzeffekt.<sup>1)</sup> Nur mit der Emission als Indikator hätte man diese Kristalle schwerlich als Phosphore erkannt.

3. Die Alkalihalogenidkristalle mit *Fremdfärbung zweiter Art* sind Phosphore mit zum Teil sehr hohem optischen Nutzeffekt. Ihr Leuchten ist häufig im unverdunkelten Zimmer sichtbar. Zur Erregung benutzt man bequemerweise Funkenlicht, dessen Wellen in einer der Absorptionsbanden II in Fig. 2 hineinfallen. Oft genügt auch Sonnenlicht zur Erregung.

Die Zuordnung der Absorptions- und Emissionsbanden zu verschiedenen Fremdmetallen, der Einfluß von deren Konzentration sowie die Abhängigkeit von der Temperatur wird von den Herren Hilsch und Witte ausgiebig bearbeitet. Lichtelektrische Leitung ist vorhanden.

Diese Alkalihalogenidphosphore gleichen in ihrem Aufbau und in der Bandenstruktur ihres Fremdmolekülspektrums in vieler Hinsicht den bekannten Sulfidphosphoren. Ihr optischer Brechungsindex ist viel kleiner als der der Sulfide. Dem entspricht die Lage ihrer Absorptionsbanden in Gebieten kürzerer Wellen. Systematische Verschiebungen der Banden beim Wechsel des umgebenden Gitters (z. B. KCl statt NaCl oder KBr statt KCl) treten deutlich hervor. Erregungs- und Ausleuchtungsvorgänge lassen sich durch direkte optische Absorptionsmessungen verfolgen.

4. *Kristalle mit kolloidaler Fremdfärbung* zeigen gelegentlich eine schwache Phosphoreszenz. Doch handelt es sich dabei m. E. um eine Nebenerscheinung, auf die wir gelegentlich zurückkommen werden.

§ 4. Bei den Sulfidphosphoren treten je nach Dauer und Höhe der Erhitzung bei der Herstellung der Präparate Banden

1) Der Zusammenhang dieses Nutzeffektes mit dem Zusatz von Fremdmolekülen (Färbung zweiter Art) ist noch nicht endgültig aufgeklärt.

in verschiedener Lage und Ausbildung hervor. Analog wirkt nach Messungen von Hrn. Hilsch bei den Kristallen der Alkalihalogenidphosphore eine Bestrahlung mit Röntgenlicht. Das Spektrum II der Erregungsbanden in Fig. 2 wird soweit ins Gebiet langer Wellen erweitert, daß es sich teilweise der Absorptionskurve I der Färbung I. Art unterlagern kann. Man vergleiche die schematische Kurve IIa in Fig. 2. Man kann die Absorptionsspektren zweiter und erster Art nachträglich trennen, wenn man das Absorptionsspektrum erster Art durch geeignete Erwärmung des Kristalles entfernt.

Diese Tatsachen spielen bei den Erscheinungen, die Przibram<sup>1)</sup> und seine Mitarbeiter über den Einfluß von  $\beta$ - und Röntgenstrahlen auf die Farbe und die Lichtemission von Kristallen beobachtet haben, eine wichtige Rolle. Die Auswahl geeigneter Fremdmetallzusätze zu den Kristallen macht viele der von Przibram beobachteten Erscheinungen verständlich.

Göttingen, I. Physikalisches Institut der Universität,  
November 1926.

---

1) K. Przibram, Zeitschr. f. Phys. 20. S. 196. 1923; Sitz.-Ber. Akad. d. Wiss. Wien, Abt. IIa, 132. S. 285. 1924; 135. S. 213. 1926.

(Eingegangen am 16. November 1926)

## Namenregister zum Jahrgang 1926

### A

- Alexandrow, W., Das Wasserstoffmolekölion und die Undulationsmechanik. I. Mitteilung: Die Berechnungsmethode der Energiestufen, die Ionisierungsspannung und das Prinzipielle über das Viellinienspektrum 81, 603.  
 Arkadijew, W., Die Reflexion Hertzscher Wellen am ferromagnetischen Drahtgitter 81, 649.

### B

- Bauer, Wilhelm, Das Widerstandsgesetz schnell bewegter Kugeln in Wasser 80, 232.  
 Becker, A., Über den Durchgang korpuskularer Strahlen durch Materie 81, 91.  
 Becker, Walter, Zur Theorie des Strahlungsgleichgewichtes der Sternatmosphären 81, 1.  
 Blechschmidt, Erich, Kathodenzerstäubungsprobleme. (Zweite Mitteilung.) Die Kathodenzerstäubung in Abhängigkeit von den Betriebsbedingungen. (Hierzu Tafel XI) 81, 999.  
 Blüh, Otto, Untersuchung von Kolloidpartikeln in Wechselfeldern verschiedener Frequenzen 79, 143. — Berichtigung zu meiner letzten Notiz 80, 181.  
 Bontsch-Bruewitsch, M. A., Die Strahlung der komplizierten rechtwinkligen Antennen mit gleichbeschaffenen Vibratoren 81, 425.  
 Brüche, Ernst, Über das Flächen- und Fadenmanometer 79, 695. — Über den Querschnitt von

Wasserstoff- und Stickstoffmolekülen gegenüber langsamen Elektronen 81, 537.

- Buchwald, Eberhard, Gittergeister bei unperiodischen Teilungsfehlern 80, 279. — Graphische Darstellungen zur Kinematik des Starkeffekts 81, 958.  
 Bühl, Alfons, Über die elektrische Doppelschicht an der Oberfläche von Quecksilber 80, 137.  
 Busch, H., Zur Schleiermacherischen Methode der Messung des Wärmeleitvermögens von Gasen 80, 33. — Berechnung der Bahn von Kathodenstrahlen im axial-symmetrischen elektromagnetischen Felde 81, 974.  
 Busse, W., Die Größenverteilung von Ionen in Gasen 81, 262. — Über den Nachweis monomolekularer Ionen in Luft und das Bestehen von Fernkräften zwischen Ion und Gasmolekülen 81, 587.

### C

- Cittert, P. H. van, Zur Messung der Feinstruktur der Wasserstofflinien mit der Lummer-Gehrckeplatte; Antwort zu den Bemerkungen des Hrn. Gehrcke 79, 94.  
 Cunradi, K., Beiträge zur autoelektronischen Entladung. (Hierzu Tafel I) 81, 155.

### D

- Danz, H. und A. Magnus, Die spezifische Wärme von Wolfram, Bor, Borstickstoff und Berylliumoxyd 81, 407.

Debye, P., Einige Bemerkungen zur Magnetisierung bei tiefer Temperatur 81, 1154.

Decker, Hugo, Die magnetische Suszeptibilität von wäßrigen Lösungen der Salze seltener Erden. (Hierzu Tafel II) 79, 324.

Dieterich, Albrecht, Über die Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante von Quarz, Flußspat und Gips 81, 523.

## E

Engset, T., Die Bahnen und die Lichtstrahlung der Wasserstoffelektronen 80, 823. — Die Bahnen und die Lichtstrahlung der Wasserstoffelektronen (Fortsetzung) 81, 572.

## F

Frerichs, R., Intensitätsmessungen von Multipletts. (Hierzu Tafel VIII) 81, 807.

Frey, B., Über die Unabhängigkeit des Funkenpotentials von der Temperatur 80, 408.

Fues, E., Das Eigenschwingungsspektrum zweiatomiger Moleküle in der Undulationsmechanik 80, 367. — Zur Intensität der Bandenlinien und des Affinitätsspektrums zweiatomiger Moleküle 81, 281.

## G

Gans, Richard, Lichtzerstreuung infolge der molekularen Rauigkeit der Trennungsfläche zweier durchsichtiger Medien 79, 204.

Gaviola, Enrique, Die Abklingungszeiten der Fluoreszenz von Farbstofflösungen 81, 681.

Gehrcke, E. und L. Janicki, Die Feinstruktur von Xenon- und Kryptonlinien 81, 314.

Geiss, W., Totalstrahlung und spezifischer Widerstand des Wolframs bei Glühtemperaturen 79, 85.

Gerlach, W. und E. Lehrer, Suszeptibilität der Gase, Curiesches Gesetz und Diamagnetismus der Flammengase 81, 1129.

Guillemin, Viktor, jr., Zur Molekülstruktur des Methan 81, 173.

## H

Heinrich, Carl, Spektralphotometrische Untersuchung der sichtbaren Strahlung des negativen Glimmlichtes in Neon und Helium 80, 349.

Heitler, W., Zwei Beiträge zur Theorie konzentrierter Lösungen 80, 629.

Hellmann, H. und H. Zahn, Die Dielektrizitätskonstanten gutleitender Elektrolytlösungen 80, 191. — Die Dielektrizitätskonstanten gutleitender Elektrolytlösungen. (Zweiter Teil) 81, 711.

Hippel, Arthur v., Kathodenzerstäubungsprobleme. (I. Mitteilung.) Hierzu Tafel XI bis XV 80, 672. — Kathodenzerstäubungsprobleme. (III. Mitteilung.) Zur Theorie der Kathodenzerstäubung 81, 1048.

Hjalmar, Elias, Die Dispersion der Röntgenstrahlen bei Gips 79, 550.

Hodler, A. und A. Magnus, Messungen der spezifischen Wärme des Silbers und des Diamanten im Gebiete hoher Temperaturen 80, 808.

Hönl, Helmut, Zum Intensitätsproblem der Spektrallinien 79, 273.

Hoffmann, G., Registrierbeobachtungen der Höhenstrahlung im Meeresniveau 80, 779.

Holgersson, Sven, Röntgenographische Strukturuntersuchungen von einigen Metallegierungen. (Die Reihen AuAg und NiCu.) Hierzu Tafel I 79, 35.

Homma, Ernst, Die Zerstreuungsgesetze der Kanalstrahlen bei ihrem Durchgang durch feste Körper 80, 609.

## J

Janicki, L. und E. Gehrcke, Die Feinstruktur von Xenon- und Kryptonlinien 81, 314.



- Johnson, M. C., Die Verteilung der Intensität in einer von positiven Strahlen ausgehenden Spektrallinie 81, 666.  
Joos, Georg, Über Farbe und Magnetismus von Ionen 81, 1076.

K

- Kerschbaum, Hans, Über Messungen der Leuchtdauer der Atome an Alkalimetallen, Sauerstoff und Stickstoff. (Hierzu Tafel VI und VII) 79, 465.  
Kiebitz, F., Zur Berechnung des rotationsasymmetrischen Strahlungsfeldes 80, 728.  
Kirchner, Fritz, Über die Richtungsverteilung der von polarisierten Röntgenstrahlen ausgelösten Elektronen. (I. Mitteilung) 81, 1113.  
Kleinmann, E., Über die zeitliche Ausbildung der Oberflächenspannung von Kochsalzlösungen 80, 245.  
Kneser, H. O., Die bei der Anregung einiger Verbindungen des Stickstoffes auftretender Spektren. (Hierzu Tafel VIII und IX) 79, 585. — Über die Anregung der Stickstoffbanden durch Elektronenstoß und über die Kantenintensitäten. (Hierzu Tafel X) 79, 597.  
Knodel, Adolf, Über die Gasströmung in Röhren und den Luftwiderstand von Kugeln. (Hierzu Tafel IX und X) 80, 533.  
König, Walter, Erwiderung auf die Bemerkung des Hrn. R. Heymanns zur Arbeit des Hrn. A. Ramspeck 79, 757.  
Kolhörster, Werner, Bemerkung zu der Arbeit des Hrn. R. A. Millikan: Kurzwellige Strahlen kosmischen Ursprungs 80, 621.  
Kopfermann, H. und R. Ladenburg, Druckfehlerberichtigung zur Arbeit: „Elektrooptische Untersuchungen am Natriumdampf“ 79, 96.  
Kottler, Friedrich, Zur Theorie der Beugung an schwarzen

- Schirmen 81, 373. — Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen 81, 869.  
Kretschmann, Erich, Theorie der Dauerströme in Supraleitern 80, 109. — Berichtigung zur Abhandlung: „Theorie der Dauerströme in Supraleitern“ 80, 532.  
Kudar, J., Zur vierdimensionalen Formulierung der undulatorischen Mechanik 81, 632.  
Kulenkampff, Helmuth, Vergleichende Untersuchungen über die Energie und die luft-ionisierende Wirkung von Röntgenstrahlen verschiedener Wellenlänge 79, 97. — Über die Ionisierung von Luft durch Röntgen- und Kathodenstrahlen 80, 261.  
Kunze, Paul, Auswertung von Aufnahmen mit der Lummerplatte 79, 528. — Funkenlinie 4686 von  $\text{He}^+$  79, 610.

L

- Ladenburg, R. und H. Kopfermann, Druckfehlerberichtigung zur Arbeit „Elektrooptische Untersuchungen am Natriumdampf“ 79, 96.  
Lange, M. v., Der Einfluß der Temperatur auf die Röntgenstrahlinterferenzen 81, 877.  
Lehrer, Erwin, Über die magnetische Suszeptibilität der Gase und ihre Abhängigkeit von Druck und Temperatur 81, 229.  
Lehrer, E. und W. Gerlach, Suszeptibilität der Gase, Curiesches Gesetz und Diamagnetismus der Flammengase 81, 1129.  
Lenard, P., Zur Entwicklung der Kenntnis von den Geschwindigkeitsverlusten der Kathodenstrahlen in der Materie 80, 1. — Über die Sekundärstrahlung und Absorption von Kathodenstrahlen 80, 17.  
Leo, Wolfgang, Über ausgewählte Gebiete des Heliumspektrums. (Hierzu Tafel V bis VIII) 81, 757.  
Lewitzky, Marie, Der Zeemaneffekt im Palladiumspektrum. (Hierzu Tafel VII) 80, 397.

## M

- Magnus, A. und H. Danz, Die spezifische Wärme von Wolfram, Bor, Borstickstoff und Berylliumoxyd 81, 407.
- Magnus, A. und A. Hodler, Messungen der spezifischen Wärme des Silbers und des Diamanten im Gebiete hoher Temperaturen 80, 808.
- Marx, Erich, Reaktionskonstanten, Verweilzeiten, Rekombinationen und Wechselzahlen in Flammgasen und die Sättigungsspannungen der Charakteristik 81, 454.
- Millikan, R. A., Kurzwellige Strahlen kosmischen Ursprungs 79, 572.

## N

- Narath, Albert und Max Trautz, Die innere Reibung von Gasgemischen 79, 637.
- Neunhöffer, Max, Beiträge zur Theorie des kontinuierlichen Anteils der Röntgenstrahlen 81, 493.
- Nies, Erich, Über den Einfluß tiefer Temperatur auf die Reflexion von Röntgenstrahlen an Kalkspat 79, 673.

## P

- Palacios, J., Theorie der Lichtemission nach dem Modell von Rutherford-Bohr 79, 55.
- Palumbo, Loedel Enrique, Optische und elektrische Konstanten des Rohrzuckers. (Mitgeteilt von R. Gans) 79, 533.
- Pfeestorf, Gerhard, Die Bestimmung der optischen Konstanten von Metallen im sichtbaren und ultravioletten Teil des Spektrums 81, 906.
- Picht, Johannes, Die Intensitätsverteilung in einem astigmatischen Strahlenbündel in Abhängigkeit von dem Brennlinienabstand und der Öffnung auf Grund der Wellentheorie des Lichtes 80, 491.
- Pogány, B., Über die Wiederholung des Harress-Sagnacschen

Versuches. (Hierzu Tafel II und III) 80, 217.

- Pohl, R. und E. Rupp, Über Alkalihalogenidphosphore 81, 1161.

## R

- Ramsauer, C., Hr. T. Schlomka, Bemerkungen zu meiner Arbeit über den unmittelbaren Nachweis der elektrischen Erldladung 79, 89. — Erwiderung an Hr. T. Schlomka 80, 436.
- Reimann, Arnold, Über die Photolumineszenz des Benzols und einiger Derivate in verschiedenen Aggregat- und Lösungszuständen. (Hierzu Tafel I) 80, 43.
- Rieth, Helene geb. Marx, Über die künstliche Doppelbrechung in zylindrischen Glaskörpern bei Einwirkung äußerer Drucke 79, 145.
- Rietschel, Otto, Über den lichtelektrischen Effekt im extremen Vakuum und in Abhängigkeit vom Druck 80, 71.
- Rother, Franz, Über den Austritt von Elektronen aus kalten Metallen. (Hierzu Tafel II bis IV) 81, 317.
- Rubinowicz, A., Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen. (Antwort auf Erwiderung von F. Kotler) 81, 140.
- Rupp, E., Interferenzuntersuchungen an Kanalstrahlen 79, 1. — Zur Leuchtdauer der Atome, Abklingung bei den Alkalien und im Magnetfeld 80, 524. — Über die Polarisation des abklingenden Kanalstrahllichtes 81, 615.
- Rupp, E. und R. Pohl, Über Alkalihalogenidphosphore 81, 1161.
- Rusch, Martin, Über eine neue Methode zur Bestimmung des Wirkungsquerschnittes gegenüber langsamen Elektronen 80, 707.

## S

- Schachtschabel, Karl, Ein einfaches Verfahren zur Messung

- der Absorption in großem Spektralbereich nebst Anwendung auf Gläser. (Hierzu Tafel IX) 81, 229.
- Schiller, Hans, Untersuchungen über die Elektrizitätsleitung in festen Dielektrika bei hohen Feldstärken 81, 32.
- Schiller, Ludwig, Bemerkung zu Hrn. Knodels Arbeit: Über die Gasströmung in Röhren und den Luftwiderstand von Kugeln 81, 866.
- Schlomka, Theodor, Erwidern an Hrn. C. Ramsauer 79, 583.
- Schmidt, Ferd. und Hans Steyer, Neue Untersuchungen über die zeitliche Änderung der Spannung reiner Wasseroberflächen 79, 442.
- Schmidt, Gerhard, Über Ionenstrahlen 80, 588.
- Schneider, Ernst, Über die Wärmeleitung von Luft und Wasserstoff 79, 177. — Berichtigung zu meiner Arbeit: „Über Wärmeleitung von Luft und Wasserstoff“ 80, 215.
- Schottky, Walter, Das Gesetz des Tiefempfangs in der klassischen Strahlungstheorie 79, 557.
- Schrödinger, E., Quantisierung als Eigenwertproblem. (I. Mitteilung) 79, 361. — II. Mitteilung 79, 489. — Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen 79, 734. — Quantisierung als Eigenwertproblem 80, 437. — Quantisierung als Eigenwertproblem. (IV. Mitteilung) 81, 109.
- Schrör, J., Beitrag zur Messung von Röntgennormalen. (Hierzu Tafel IV) 80, 297.
- Sexl, Theodor, Ergänzung zu B. Baule „Theoretische Behandlungen der Erscheinungen in verdünnten Gasen“ 80, 515. — Zur Theorie der Radiometerwirkungen II 81, 800. — Zur gastheoretischen Begründung der Stokes-Cunninghamschen Formel 81, 155.
- Smekal, Adolf, Über spontane „strahlungslose“ Quantenvorgänge 81, 391.
- Smirnow, N. A., Zur Theorie der Buchererschen Versuche 79, 227.
- Sommerfeld, A., Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie 81, 1135.
- Stadler, Robert, Über die Phosphoreszenzerregung durch mittelschnelle Kathodenstrahlen 80, 741.
- Steyer, Hans u. Ferd. Schmidt, Neue Untersuchungen über die zeitliche Änderung der Spannung reiner Wasseroberflächen 79, 442.

T

- Tammann, G., Über die Verteilung zweier Atomarten in Mischkristallreihen 79, 81.
- Tomaschek, R., Über die Versuche zur Auffindung elektrodynamischer Wirkungen der Erdbewegung in großen Höhen. II 80, 509.
- Trautz, Max und Albert Narath, Die innere Reibung von Gasgemischen 79, 637.
- Travnicek, M., Beiträge zur Kenntnis der Samariumphosphore 79, 237.

V

- Vegard, L., Das Leuchten verfestigter Gase und seine Beziehungen zu kosmischen Vorgängen. (Hierzu Tafel III bis V) 79, 377.

W

- Waetzmann, E., Über entoptische Ringsysteme 81, 952.
- Waller, Ivar, Zur Theorie der Röntgenreflexion 79, 261.
- Wessel, Walter, Über den Massenpunkt der Wellenmechanik 81, 1086.
- Wien, W., Magnetische Ablenkung der Spektrallinien. (Hierzu Taf. X) 81, 994.

Wilhelmy, E., Zeemaneffekt am Bogen- und Funkenspektrum von Molybdän. (Hierzu Tafel V und VI) 80, 305.

Wimmer, Max, Über die Beeinflussung der ultraroten Kohlensäureabsorptionsbande bei  $4,27\ \mu$  durch fremde Gase und ihre Anwendung zur Gasanalyse 81, 1091.

Wintner, Aurel, Über gewisse Eigenschwingungen mit kontinuierlichem Spektrum 81, 577. (Zweite Mitteilung) 81, 846.

Wolf, K. E., Dispersion und Molrefraktion der Alkalihalogenide und der Halogenwasserstoffe 81, 637.

Wolfsohn, G., Über das Bogenpektrum des Kupfers bei ver-

minderten Druck. (Hierzu Tafel VIII) 80, 415.

## Z

Zahn, H., Ein neues Meßprinzip zur Untersuchung der Dielektrizitätskonstante gut leitender Substanzen 80, 182.

Zahn, H. und H. Hellmann, Die Dielektrizitätskonstanten gut leitender Elektrolytlösungen 80, 191. — Zweiter Teil 81, 711.

Zimmermann, W., Über lichtelektrische Untersuchungen an Flüssigkeitsoberflächen 80, 329.

Zuber, K., Beitrag zur Kenntnis der Verzögerungszeit bei der Funkenentladung 81, 205.

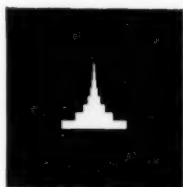
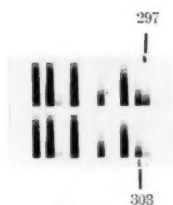


Fig. 2



mit 1-mm-Blauviolettglas

" 2- " "

Fig. 5a



Achse von der  
die Elektro-  
meterausgänge  
gezählt werden

Fig. 5b



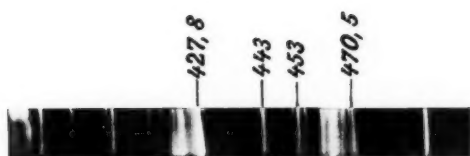
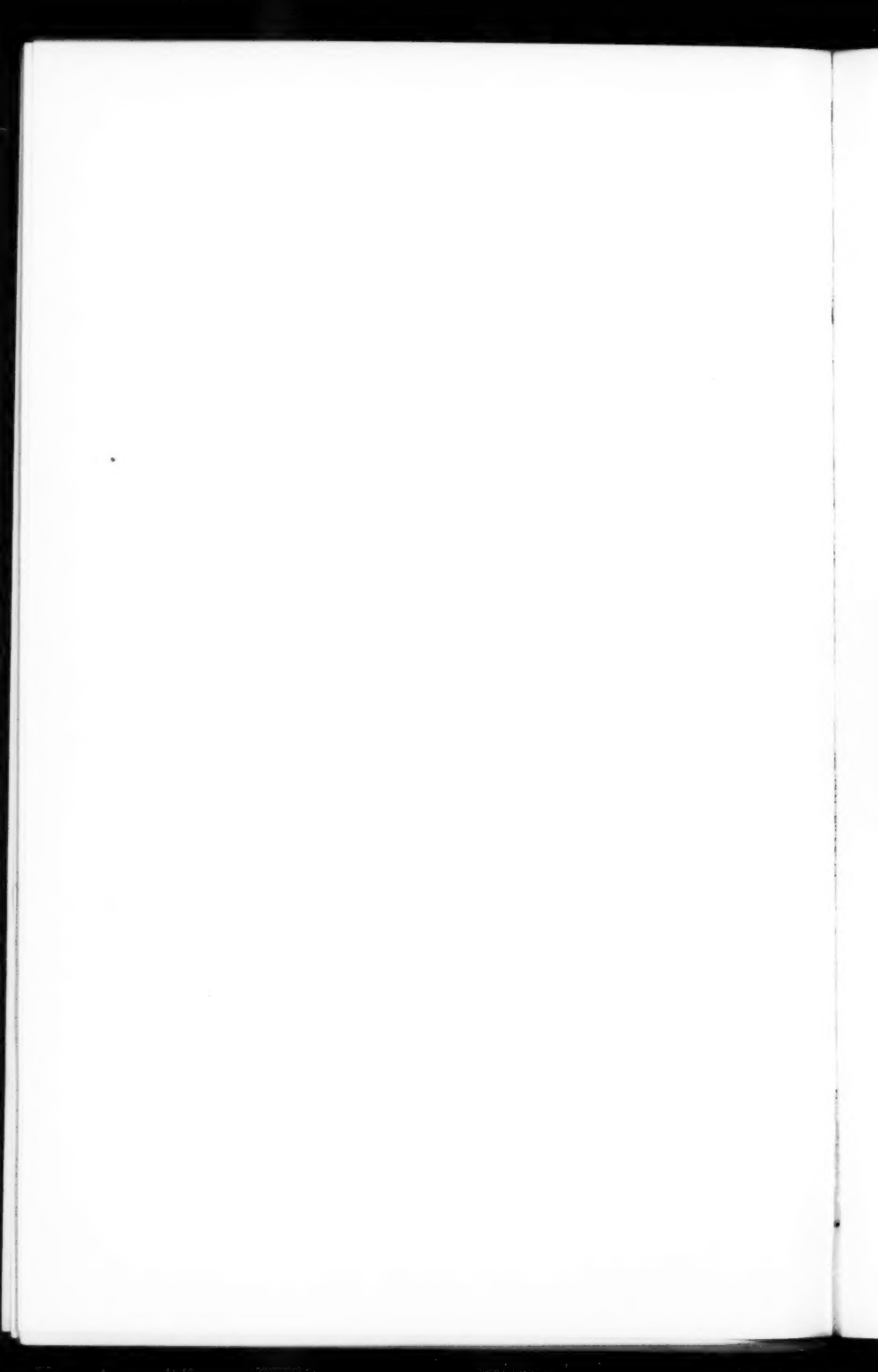


Fig. 2





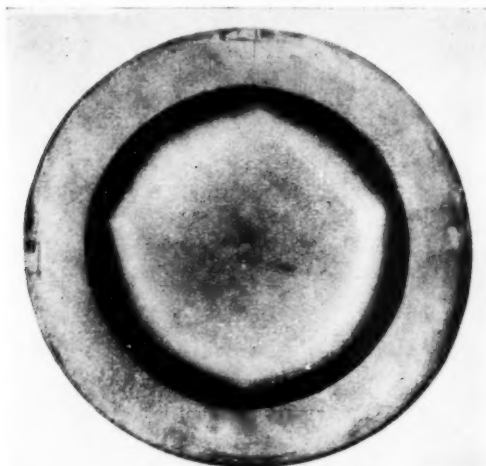


Fig. 3. Zonenbildung auf der Kathode durch Glasringauflage



Fig. 11. Goldkathode nach Zerstäubung bei hohen Spannungen

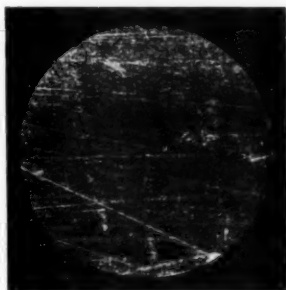


Fig. 12. Goldkathode nach Zerstäubung bei niedrigen Spannungen

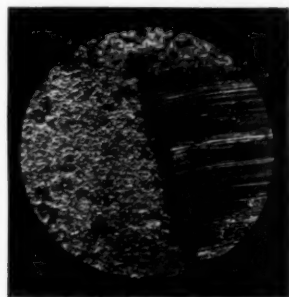


Fig. 13. Silberkathode mit rückgestäubten Teilchen, zur Hälfte abgewischt

E. Blechschmidt

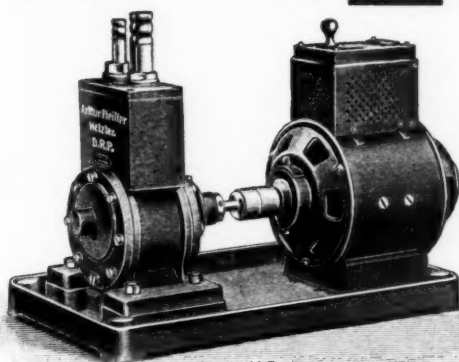


# ≡ Pfeiffer's ≡

## Rot. Zylinder-Ölluftpumpe

D. R. P.

aus Eisen



1:8

Prospekt-Nr. 1300 c

**6 cbm/St. — 0,1 mm Hg — 1,5 Atm.**

*Kein Ölrückschlag \* Kräftige Bauart*

wird in bewährter Ausführung seit 3 Jahren  
zu gleichbleibenden Preisen geliefert.

**Pumpe** mit Riemenscheibe . . . . . **Rm. 195.—**

**Pumpe** mit Motor, Riemenantrieb, Flachriemen, Anlasser, Steckdose, auf Holzplatte montiert (für Wechselstrom mit automatischer Einschaltung des Motors) . . . . . **Rm. 420.—**

**Pumpe** mit Motor (Langsamläufer) direkt gekuppelt, Anlasser, Steckdose, auf eiserner Grundplatte montiert, für Gleich- und Drehstrom . . . . . **Rm. 532.—**

**Hochvacuumpumpen D. R. P.** mit Saugleistungen bis  
100 cbm/St. und Vacua bis  $\frac{1}{1000000}$  mm Hg.

## **Arthur Pfeiffer, Wetzlar 1**

# **Handbuch der physikalischen Optik**

Bearbeitet von vielen Fachgelehrten

Herausgegeben von

**Professor Dr. E. Gehrcke**

ZWEI BÄNDE

Bisher erschienen:

Band I, 1. Hälfte: VIII, 470 Seiten mit 223 Abbildungen  
im Text. 1926. gr. 8<sup>o</sup>.

Einzelpreis Rm. 40.—. Subskriptionspreis Rm. 32.—

Band II, 1. Hälfte: VI, 418 Seiten mit 166 Abbildungen  
im Text. 1926. gr. 8<sup>o</sup>.

Einzelpreis Rm. 37.50, Subskriptionspreis Rm. 30.—

Der Subskriptionspreis verpflichtet zur Abnahme des vollständigen Bandes  
und erlischt bei Vollständigwerden.

Band I, 2. Hälfte folgt etwa im Januar 1927. — Band II, 2. Hälfte,  
mit Register für das vollständige Werk, schließt das Handbuch  
Anfang 1927 ab.

*(Früher „Winkelmanns Handbuch der Physik“  
2. Auflage, Bd. VI, 2. Teil)*

Das Handbuch der physikalischen Optik bringt die von vielen Seiten  
ersehnte, zeitgemäße Darstellung eines durch überraschende Entwicklung  
in die Breite und Tiefe ausgezeichneten Wissensgebietes, in welchem sich alle  
Zweige der Physik, wie Elektrizität, Magnetismus, Mechanik, Wärme und  
auch benachbarte Wissenschaften, wie Chemie und Astronomie, berühren.  
In der Erkenntnis der Notwendigkeit einer 3. Auflage von Winkelmanns  
Handbuch der Physik, erwies sich der Stoff als so umfangreich, daß es zweck-  
mäßig erschien, das Gesamtwerk in Handbücher der einzelnen physikalischen  
Materien zu zerlegen. Es erscheint deshalb außer dem vorstehend genannten  
noch das Handbuch der Mechanik. Das 5 bändige Handbuch der Elektrizität  
und des Magnetismus, herausgegeben von L. Graetz und der die geometrische  
Optik umfassende Band in einer Neubearbeitung von Zeiss'schen Mitarbeitern,  
liegen bereits fertig vor.

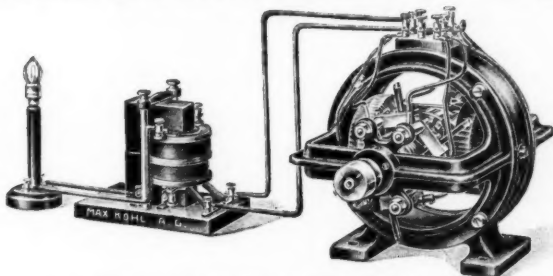
Ausführliche Prospekte bitte zu verlangen!

---

JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

# Max Kohl A. G. Chemnitz 2

**:: Fabrik physikalischer Apparate ::**  
**Hörsaal- und Laboratorien-Einrichtungen**

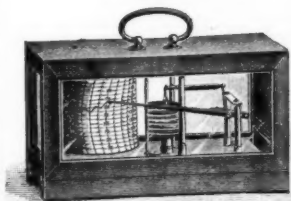


Dynamomaschine für Gleich-, Wechsel- und Drehstrom  
 Wechselstromtransformator und Glühlampe

**Rotierende Quecksilber - Hochvakuum - Pumpen**

## Original Lambrechts **Barograph**

mit dreimonatigem  
 Umlauf



Prospekt 17

Wilh.  A.-G.  
 Lambrecht Göttingen  
 Gegründet 1859

## **AGGREGAT- ZUSTÄNDE**

Die Zustandsänderungen der  
 Materie in Abhängigkeit von  
 Druck und Temperatur

von

**Gustav Tammann**

Direktor des Instituts f. physikal. Chemie  
 in Göttingen

2. Auflage. VIII, 292 S. mit 128 Abb.  
 im Text. 1923.

Rm. 9.—, geb. Rm. 10.50

*Zeitschrift für Metallkunde:* Man  
 muß die außerordentliche Fülle des  
 experimentellen und gedanklichen  
 Materials des Buches bewundern.

VERLAG VON LEOPOLD VOSS  
 IN LEIPZIG

# **Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik**

Bearbeitet von zahlreichen Fachgelehrten

Herausgegeben von

Prof. Dr. **F. Auerbach** und Prof. Dr. **W. Hort**  
Jena Charlottenburg

**BAND I** Lieferung 1: X, 306 Seiten mit 120 Abb. im  
Text. 1926. gr. 8°. Einzelpreis Rm. 30.—  
Subskriptionspreis Rm. 24.—

Der Subskriptionspreis verpflichtet zur Abnahme des  
vollständigen Bandes und erlischt bei Vollständigwerden

**BAND III** komplett; X, 464 Seiten mit 198 Abb. im  
Text. 1926. gr. 8°. Einzelpreis Rm. 40.—  
Geb. Ganzlein. Einzelpreis Rm. 42.50  
Geb. Ganzlein. Subskriptionspreis Rm. 34.50

Die Fortsetzung folgt so rasch als möglich

(Früher „Winkelmanns Handbuch der Physik“, 2. Auflage,  
Band I: Allgemeine Physik, erster und zweiter Teil)

Die wesentlich erweiterte Neubearbeitung des Mechanik-Hand-  
buches von Winkelmann wird die neueren Fortschritte und be-  
sonders die technischen Anwendungen der Mechanik berücksichtigen,  
so daß das Werk für lange Zeit das umfassende und maßgebende  
Hilfsmittel bildet und sowohl für den Wissenschaftler wie für den  
Praktiker in gleicher Weise unentbehrlich sein wird.

Ausführliche Prospekte kostenlos

---

---

**JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG**

---

---

Die Redaktion der Annalen wird von den auf der Titelseite genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **München, Kolberger Straße 16.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft können die Annalen zu einem Vorzugspreis beziehen.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen.) Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

**Zitate** sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortgeschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

# E. Leybold's Nachfolger A.-G.

KOLN a. Rhein  
Brüderstraße 7

BERLIN NW. 7  
Dorotheenstr. 53, II

## Diffusionsluftpumpen aus Stahl

nach Prof. Dr. Gaede



Mod. A



Mod. B



Mod. C

$\frac{1}{9}$  natürlicher Größe

	Hochvakuum	Saugleistung	Vorvak.
Modell A	höher als $1.10^{-6}$	15 l p. sec.	20 mm
" B	"	10 l "	8 "
" C	"	2,5 l "	0,1 "

*Sonderliste auf Wunsch*

Metzger & Wittig, Leipzig



